

# 筛法

## 埃氏筛

列出所有数字，从小到大枚举，将枚举数的所有倍数筛掉。复杂度 $O(n\log\log n)$ 证明见[这里](#)

```
void sieve(int n){
    int i,j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2;i<=n;i++){
        if(isnp[i])continue;
        pri[cnt++]=i;
        for(j=i;j<=n;j+=i)isnp[j]=1;
    }
}
```

## 欧拉筛（线性筛）

埃氏筛会将一个合数被其所有质因数都筛一遍，很浪费时间。

考虑优化，让每个合数都只被最大的非本身的因数（和最小质因数共同）筛到一遍。

故首先枚举所有数  $i$  再枚举所有  $i$  的素倍数  $t=pri_j \times i$  ( $i$  与  $pri[j]$  共同) 将  $t$  筛掉，且当  $pri_j \mid i$  时退出枚举。此举的正确性在于：

- $i$  的最小质因数为  $pri[j]$
- $\forall k > j, i \times pri[k]$  会被比  $i$  更大的  $\frac{i}{pri[j]} \times pri[k]$  与  $pri[j]$  共同筛掉。

因此，欧拉筛的每个数都只被筛了一次，复杂度  $O(n)$

### 模板题

```
void sieve(int n){
    int i,j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2;i<=n;i++){
        if(!isnp[i])pri[cnt++]=i;
        for(j=0;j<cnt;j++){
            if(pri[j]*i>n)break;
            isnp[pri[j]*i]=1;
            if(i%pri[j]==0)break;
        }
    }
}
```

```
}
```

除了筛素数，欧拉筛还可以线性地筛一些[积性函数](#)

## 欧拉函数

欧拉函数  $\varphi(n)$  表示小于等于  $n$  且  $\gcd(i,n)=1$  的  $i$  个数。

欧拉函数是积性的，也就是对任意  $n,m$  满足  $\gcd(n,m)=1$  有  $\varphi(n \times m) = \varphi(n) \times \varphi(m)$  [有一个不错的证法](#)

处理边界情况：

- 当  $n=p$  的时候  $\varphi(n)=p-1$
- 当  $n=p^k$  的时候  $\varphi(n)=p^{k-1}(p-1)$

因为欧拉函数是积性的，如果将  $n$  质因数分解为  $n = \prod_i p_i^{k_i}$  可以得到：

$$\varphi(n) = \prod_i p_i^{k_i-1} (p_i - 1) = n \prod_i \frac{p_i - 1}{p_i}$$

```
void sieve(int n){
    int i,j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2;i<=n;i++){
        if(!isnp[i])pri[cnt++]=i,phi[i]=i-1;
        for(j=0;j<cnt;j++){
            if(pri[j]*i>n)break;
            isnp[pri[j]*i]=1;
            if(i%pri[j]==0){
                phi[pri[j]*i]=phi[i]*pri[j];
                break;
            }else{
                phi[pri[j]*i]=phi[i]*phi[pri[j]];
            }
        }
    }
}
```

## 莫比乌斯函数

[这里](#)讲过了，不再赘述。

# 杜教筛

## min\_25 筛

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:

[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:potassium:sieve&rev=1590340833](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:potassium:sieve&rev=1590340833) 

Last update: **2020/05/25 01:20**