筛法

埃氏筛

列出所有数字，从小到大枚举，将枚举数的所有倍数筛掉。复杂度$O(n\log\log n)$□证明见这里□

```
void sieve(int n){
    int i,j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2;i<=n;i++){
        if(isnp[i])continue;
        pri[cnt++]=i;
        for(j=i;j<=n;j+=i)isnp[j]=1;
    }
}
```

欧拉筛（线性筛）

埃氏筛会将一个合数被其所有质因数都筛一遍，很浪费时间。

考虑优化，让每个合数都只被**最大的非本身的因数**（和**最小质因数**共同）筛到一遍。

故首先枚举所有数 i □再枚举所有 i 的素倍数 $t=pri_j\times i$ □□ i 与 $pri[j]$ 共同）将 t 筛掉，且当 $pri_j\mid i$ 时退出枚举。此举的正确性在于：

- i 的最小质因数为 $pri[j]$ □
- $\forall k>j, i\times pri[k]$ 会被比 i 更大的 $\frac{i}{pri[j]}\times pri[k]$ 与 $pri[j]$ 共同筛掉。

因此，欧拉筛的每个数都只被筛了一次，复杂度 $O(n)$ □

模板题

```
void sieve(int n){
    int i,j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2;i<=n;i++){
        if(!isnp[i])pri[cnt++]=i;
        for(j=0;j<cnt;j++){
            if(pri[j]*i>n)break;
            isnp[pri[j]*i]=1;
            if(i%pri[j]==0)break;
        }
    }
```

```
}
```

除了筛素数，欧拉筛还可以线性地筛一些积性函数□

欧拉函数

欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示小于等于 n 且 $\gcd(i,n)=1$ 的 i 个数。

欧拉函数是积性的，也就是对任意 n,m 满足 $(m,n)=1$ □有 $\varphi(n\times m)=\varphi(n)\times \varphi(m)$ □有一个不错的证法□

处理边界情况：

- 当 $n=p$ 的时候□ $\varphi(n)=p-1$ □
- 当 $n=p^k$ 的时候□ $\varphi(n)=p^{k-1}(p-1)$ □

因为欧拉函数是积性的，如果将 n 质因数分解为 $n=\prod_i p_i^{k_i}$ □可以得到：

$$ \begin{aligned} \varphi(n)&=\prod_i p_i^{k_i-1}(p_i-1)\\ &=n\prod_i\frac{p_i-1}{p_i} \end{aligned} $$

```
void sieve(int n){
    int i,j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2;i<=n;i++){
        if(!isnp[i])pri[cnt++]=i,phi[i]=i-1;
        for(j=0;j<cnt;j++){
            if(pri[j]*i>n)break;
            isnp[pri[j]*i]=1;
            if(i%pri[j]==0){
                phi[pri[j]*i]=phi[i]*pri[j];
                break;
            }else{
                phi[pri[j]*i]=phi[i]*phi[pri[j]];
            }
        }
    }
}
```

莫比乌斯函数

这里讲过了，不再赘述。

杜教筛

min_25 筛