

筛法

埃氏筛

列出所有数字，从小到大枚举，将枚举数的所有倍数筛掉。复杂度 $O(n \log \log n)$ 证明见[这里](#)

```
void sieve(int n){
    int i, j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2; i<=n; i++){
        if(isnp[i]) continue;
        pri[cnt++]=i;
        for(j=i; j<=n; j+=i) isnp[j]=1;
    }
}
```

欧拉筛（线性筛）

埃氏筛会将一个合数被其所有质因数都筛一遍，很浪费时间。

考虑优化，让每个合数都只被最大的非本身的因数（和最小质因数共同）筛到一遍。

故首先枚举所有数 \$i\$ 再枚举所有 \$i\$ 的素倍数 \$t=pri_j \times i\$ (\$i\$ 与 \$pri[j]\$ 共同) 将 \$t\$ 筛掉，且当 \$pri_j \mid i\$ 时退出枚举。此举的正确性在于：

- \$i\$ 的最小质因数为 \$pri[j]\$
- \$\forall k > j, i \times pri[k]\$ 会被比 \$i\$ 更大的 \$\frac{i}{pri[j]} \times pri[k]\$ 与 \$pri[j]\$ 共同筛掉。

因此，欧拉筛的每个数都只被筛了一次，复杂度 $O(n)$

模板题

```
void sieve(int n){
    int i, j;
    isnp[0]=isnp[1]=1;
    for(i=2; i<=n; i++){
        if(!isnp[i]) pri[cnt++]=i;
        for(j=0; j<cnt; j++){
            if(pri[j]*i>n) break;
            isnp[pri[j]*i]=1;
            if(i%pri[j]==0) break;
        }
    }
}
```

```
}
```

除了筛素数，欧拉筛还可以线性地筛一些积性函数

欧拉函数

欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示小于等于 n 且 $\gcd(i, n) = 1$ 的 i 个数。

欧拉函数是积性的，也就是对任意 n, m 满足 $(n, m) = 1$ 有 $\varphi(n \times m) = \varphi(n) \times \varphi(m)$ [有一个不错的证法](#)

处理边界情况：

- 当 $n = p$ 的时候 $\varphi(n) = p - 1$
- 当 $n = p^k$ 的时候 $\varphi(n) = p^{k-1}(p - 1)$

因为欧拉函数是积性的，如果将 n 质因数分解为 $n = \prod_i p_i^{k_i}$ 可以得到：

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \prod_i p_i^{k_i-1}(p_i - 1) \\ &= n \prod_i \frac{p_i - 1}{p_i} \end{aligned}$$

```
void sieve(int n){  
    int i, j;  
    isnp[0]=isnp[1]=1;  
    for(i=2;i<=n;i++){  
        if(!isnp[i])pri[cnt++]=i,phi[i]=i-1;  
        for(j=0;j<cnt;j++){  
            if(pri[j]*i>n)break;  
            isnp[pri[j]*i]=1;  
            if(i%pri[j]==0){  
                phi[pri[j]*i]=phi[i]*pri[j];  
                break;  
            }else{  
                phi[pri[j]*i]=phi[i]*phi[pri[j]];  
            }  
        }  
    }  
}
```

莫比乌斯函数

[这里](#)讲过了，不再赘述。

杜教筛

杜教筛想要解决的问题是，对于数论函数 f 要在小于线性的复杂度求出前缀和
 $S_f(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$

可以应用杜教筛的前提是，存在一个易求前缀和的数论函数 g 使得狄利克雷卷积 $f \ast g$ 易求前缀和。当两个函数都可以 $O(1)$ 地求出在某点的前缀和时，通过预处理一定数量的前缀和，求出 f 在某处的前缀和复杂度是可以达到 $O(n^{1/3})$ 的。

具体推导过程如下：（设 f, g, h 的前缀和函数分别为 s_f, s_g, s_h ）

$$\begin{aligned} s_h(n) &= \sum_{i=1}^n h(i) = \sum_{d \mid i} f(\frac{i}{d})g(d) \\ &= \sum_{d=1}^n \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} g(d)s_f(\lfloor \frac{n}{dt} \rfloor) \\ &= g(1)s_f(n) + \sum_{d=2}^n g(d)s_f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor) \\ &= g(1)s_f(n) + \sum_{d=2}^n g(d)s_f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor) - g(1)s_f(n) = \frac{s_h(n)}{g(1)} \end{aligned}$$

等式右边数论分块处理，递归计算 s_f 即可。

复杂度证明

设 $A = \{1, 2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}, B = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \rfloor\}$ 设 $U(n) = A \cup B$ 易看出 $|U(n)|$ 是 $O(\sqrt{n})$ 级别的。同时，对于任意 $m \in U(n)$ 有 $U(m) \subseteq U(n)$ 证明：设 $m = \lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ 则任意 $\lfloor \frac{m}{b} \rfloor = \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor$ $\in U(n)$

设计算出 $s_f(n)$ 复杂度为 $T(n)$ 则根据上述结论，为计算出 $s_f(n)$ 只需要在记忆化过程中总共计算出 $s_f(i), i \in U(n)$ 即可，故考虑枚举次数，有等式：

$$\begin{aligned} T(n) &= O(\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (\lfloor \sqrt{n} \rfloor / i)) \\ &= O(\int_1^{\sqrt{n}} \lfloor \sqrt{n} / x \rfloor dx) = O(x^{1/2} / 2 + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

设线性预处理了前 \sqrt{n} 项，则复杂度为：

$$\begin{aligned} T(n) &= O(\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (\lfloor \sqrt{n} / i \rfloor) \sqrt{n}) \\ &= O(\int_1^{\sqrt{n}} \lfloor \sqrt{n} / x \rfloor \sqrt{x} dx) = O(\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2} x^{3/2} + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

取 $b = n^{1/3}$ 取得最优复杂度 $O(n^{1/3})$

实例

min_25 筛

Last update: 2020-2021:teams:i_dont_know_png:potassium:sieve https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:potassium:sieve&rev=1590370879
2020/05/25 09:41

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:potassium:sieve&rev=1590370879

Last update: **2020/05/25 09:41**