

比赛

无

学习总结

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演 $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 则 $f(n) = \mu * g$

$\epsilon(i) = [i=1]$ 在积性函数里扮演了类似于自然数中 1 的角色，为什么让 ϵ 扮演自然数中 1 的角色呢，因为 $(f * \epsilon)(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) \epsilon(d) = f(n)$

$$id(i) = i$$

$$1(i) = 1$$

$$\phi(i) = \text{多少个 } < i \text{ 且与 } i \text{ 互质}$$

$$d(i) = i \text{ 约数个数}$$

$$\sigma(i) = i \text{ 约数个数和}$$

设 $n = \sum_{i=1}^m p_i^{k_i}$ 则

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^m, & \text{for all } i=1 \dots m, \exists k_i \geq 2 \end{cases}$$

狄利克雷卷积中， 1 的逆是 μ 即 $1 * \mu = \epsilon$

这很容易理解：对 $(1 * \mu)(n)$ 作出贡献的仅有 n 的质因数的乘积和 1

对于 n 的质因数，如果 n 有 $m \geq 1$ 个质因数，那它就有 m 个“一个质因数的积”， $\dots$ ，他们卷起来的和是

$$C_m^1 + (-1) \cdot C_m^2 + (-1)^2 \cdot C_m^3 + \dots + (-1)^m C_m^m = (1 + (-1))^m - 1$$

加上 1 的贡献，即为 0 。

所以只有当 $n=1$ 的时候 $(1 * \mu)(n)$ 才为 1 ，故 $1 * \mu = \epsilon$

通过这个我们很容易推出莫比乌斯反演 $g = f * 1$ 所以 $f = g * \mu$

然后就是一些常见的结论：

$d = 1 * 1$ 枚举约数，对 1 求和

$\sigma = d * 1$ 枚举约数，对约数求和

$\phi = 1 * \phi$ 枚举约数，每个约数求出小于他且与他互质的个数，即求这个约数为分母的真分数个数，它们的和必为 n 例子见下：

$$\frac{1}{12} \frac{2}{12} \frac{3}{12} \frac{4}{12} \frac{5}{12} \frac{6}{12} \frac{7}{12} \frac{8}{12} \frac{9}{12} \frac{10}{12} \frac{11}{12} \frac{12}{12}$$

可以化简为

$$\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12} \Rightarrow \phi(12)=4$$

$$\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \Rightarrow \phi(6)=2$$

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \Rightarrow \phi(4)=2$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \Rightarrow \phi(3)=2$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \phi(2)=1$$

$$\frac{1}{1} \Rightarrow \phi(1)=1$$

根据 $\phi(id)=1 \Rightarrow \phi(id)=id \cdot \mu$

题目略（摸了，下次再补）

常用套路 $\sum_i \sum_j f(i,j)$ 变换为 $\sum_k \sum_i \sum_j [f(i,j)=k]$ 这样拆出来，比如 $f(i,j)=\gcd(i,j)$ 的时候拆出来比较容易进行反演之类的操作。

组合数学

需要注意的一个式子 $\sum_{i=L}^R C_i^x = C_{R+1}^{x+1} - C_L^{x+1}$ 其实就是对 $C_i^x = C_{i+1}^{x+1} - C_i^{x+1}$ 求和。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:week_summary_1:potassium

Last update: 2020/05/09 12:35