

比赛

无

知识点

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演 $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 则 $f(n) = \mu * g$

$\epsilon(i) = [i=1]$ 在积性函数里扮演了类似于自然数中 1 的角色，为什么让 ϵ 扮演自然数中 1 的角色呢，因为 $(f * \epsilon)(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) \epsilon(d) = f(n)$

$\epsilon(i) = i$

$1(i) = 1$

$\phi(i) = \text{多少个 } < i \text{ 且与 } i \text{ 互质}$

$d(i) = \text{约数个数}$

$\sigma(i) = \text{约数个数和}$

设 $n = \sum_{i=1}^m p_i^{k_i}$ 则

$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^m, & \forall i, k_i=1 \\ 0, & \exists i, k_i \geq 2 \end{cases}$

狄利克雷卷积中， 1 的逆是 μ 即 $1 * \mu = \epsilon$

这很容易理解：对 $(1 * \mu)(n)$ 作出贡献的仅有 n 的质因数的乘积和 1

对于 n 的质因数，如果 n 有 $m \geq 1$ 个质因数，那它就有 m 个“一个质因数的积” C_m^2 个“两个质因数的积，...，他们卷起来的和是

$C_m^1 + (-1) \cdot C_m^2 + (-1)^2 \cdot C_m^3 + \dots + (-1)^m C_m^m = (1 + (-1))^m - 1$

加上 1 的贡献，即为 0 。

所以只有当 $n=1$ 的时候 $(1 * \mu)(n)$ 才为 1 ，故 $1 * \mu = \epsilon$

通过这个我们很容易推出莫比乌斯反演 $g = f * 1$ 所以 $f = g * \mu$

然后就是一些常见的结论：

$d = 1 * 1$ (枚举约数，对 1 求和)

$\sigma = d * 1$ (枚举约数，对约数求和)

$\phi = 1 * \phi$ (枚举约数，每个约数求出小于他且与他互质的个数，即求这个约数为分母的真分数个数，它们的和必为 n) 例子见下：

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{6}{12} + \frac{7}{12} + \frac{8}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} + \frac{11}{12} + \frac{12}{12}$$

可以化简为

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{7}{12} + \frac{11}{12} = \phi(12) = 4$$

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \phi(6) = 2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \phi(4) = 2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \phi(3) = 2$$

$$\frac{1}{2} = \phi(2) = 1$$

$$1 = \phi(1) = 1$$

根据 $\phi(1) = 1$ 有 $\phi(id) = id * \mu$

题目略（摸了，下次再补）

常用套路 $\sum_i \sum_j f(i,j)$ 变换为 $\sum_k \sum_i \sum_j [f(i,j) = k]$ 这样拆出来，比如 $f(i,j) = \gcd(i,j)$ 的时候拆出来比较容易进行反演之类的操作。

组合数学

需要注意的一个式子 $\sum_{i=L}^R C_i^x = C_{R+1}^{x+1} - C_L^{x+1}$ 其实就是对 $C_i^x = C_{i+1}^{x+1} - C_i^{x+1}$ 求和。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:week_summary_1:potassium&rev=1588957373

Last update: 2020/05/09 01:02