

# 比赛

无

## 学习总结

### 莫比乌斯反演

莫比乌斯反演  $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$  则  $f(n) = \mu * g$

$\epsilon(i) = [i=1]$  在积性函数里扮演了类似于自然数中  $1$  的角色，为什么让  $\epsilon$  扮演自然数中  $1$  的角色呢，因为  $(f * \epsilon)(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) \epsilon(d) = f(n)$

$$\epsilon(i) = i$$

$$1(i) = 1$$

$$\phi(i) = \text{多少个 } < i \text{ 且与 } i \text{ 互质}$$

$$d(i) = i \text{ 约数个数}$$

$$\sigma(i) = i \text{ 约数个数和}$$

设  $n = \sum_{i=1}^m p_i^{k_i}$  则

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^m, & \forall i, k_i=1 \\ 0, & \exists i, k_i \geq 2 \end{cases}$$

狄利克雷卷积中， $1$  的逆是  $\mu$  即  $1 * \mu = \epsilon$

这很容易理解：对  $(1 * \mu)(n)$  作出贡献的仅有  $n$  的质因数的乘积和  $1$

对于  $n$  的质因数，如果  $n$  有  $m \geq 1$  个质因数，那它就有  $m$  个“一个质因数的积”  $C_m^1$  个“两个质因数的积，...，他们卷起来的和是

$$C_m^1 + (-1) \cdot C_m^2 + (-1)^2 \cdot C_m^3 + \dots + (-1)^m C_m^m = (1 + (-1))^m - 1$$

加上  $1$  的贡献，即为  $0$ 。

所以只有当  $n=1$  的时候  $(1 * \mu)(n)$  才为  $1$ ，故  $1 * \mu = \epsilon$

通过这个我们很容易推出莫比乌斯反演  $g = f * 1$  所以  $f = g * \mu$

然后就是一些常见的结论：

$d = 1 * 1$  (枚举约数，对  $1$  求和)

$\sigma = d * 1$  (枚举约数，对约数求和)

$\phi = 1 * \phi$  (枚举约数，每个约数求出小于他且与他互质的个数，即求这个约数为分母的真分数个数，它们的和必为  $n$ ) 例子见下：

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{6}{12} + \frac{7}{12} + \frac{8}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} + \frac{11}{12} + \frac{12}{12}$$

可以化简为

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{7}{12} + \frac{11}{12} = \phi(12) = 4$$

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \phi(6) = 2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \phi(4) = 2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \phi(3) = 2$$

$$\frac{1}{2} = \phi(2) = 1$$

$$1 = \phi(1) = 1$$

根据  $\phi(1) = 1$  有  $\phi(id) = id * \mu$

题目略（摸了，下次再补）

常用套路  $\sum_i \sum_j f(i,j)$  变换为  $\sum_k \sum_i \sum_j [f(i,j) = k]$  这样拆出来，比如  $f(i,j) = \gcd(i,j)$  的时候拆出来比较容易进行反演之类的操作。

## 组合数学

需要注意的一个式子  $\sum_{i=L}^R C_i^x = C_{R+1}^{x+1} - C_L^{x+1}$  其实就是对  $C_i^x = C_{i+1}^{x+1} - C_i^{x+1}$  求和。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:week\\_summary\\_1:potassium&rev=1588958082](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:week_summary_1:potassium&rev=1588958082)

Last update: 2020/05/09 01:14