比赛

无

学习总结

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演□$g(n)=\sum_{d|n}f(d)$□则$f(n)=\mu *g$

$\epsilon(i)=[i==1]$在积性函数里扮演了类似于自然数中1的角色，为什么让ϵ扮演自然数中1的角色呢，因为$(f*\epsilon)(n)=\sum_{d|n}f(\frac nd)\epsilon(d)=f(n)$□

$$id(i)=i$$

$$1(i)=1$$

$$\phi(i)=\text{多少个<i且与i互质}$$

$$d(i)=i \text{约数个数}$$

$$\sigma(i)=i \text{约数个数和}$$

设$n=\sum_{i=1}^{m}p_i^{k_i}$□则

$$\mu(n)=\left\{\begin{aligned}&1,&n=1\\&(-1)^m,&\forall _ik_i=1\\&0,&\exists_ik_i\geq2 \end{aligned}\right.$$

狄利克雷卷积中，1的逆是μ□即$1*\mu=\epsilon$□

这很容易理解：对$(1*\mu)(n)$作出贡献的仅有**n的质因数的乘积**和**1**□

对于n的质因数，如果n有$m\geq1$个质因数，那它就有m个“一个质因数的积”□C_{m}^{2}个“两个质因数的积，⋯，他们卷起来的和是

$$C_m^1+(-1)\cdot C_m^2+(-1)^2\cdot C_m^3+\ldots+(-1)^mC_m^{m}=(1+(-1))^m-1$$

加上1的贡献，即为0。

所以只有当$n=1$的时候$(1*\mu)(n)$才为1，故$1*\mu=\epsilon$□

通过这个我们很容易推出莫比乌斯反演□$g=f*1$□所以$f=g*\mu$□

然后就是一些常见的结论：

$d=1*1$□枚举约数，对1求和）

$\sigma=d*1$□枚举约数，对约数求和）

$id=1*\phi$□枚举约数，每个约数求出小于他且与他互质的个数，即求这个约数为分母的真分数个数，它们的和必为n□例子见下：

$\frac 1{12}\frac 2{12}\frac 3{12}\frac 4{12}\frac 5{12}\frac 6{12}\frac 7{12}\frac 8{12}\frac 9{12}\frac {10}{12}\frac {11}{12}\frac {12}{12}$

可以化简为

$\frac 1{12},\frac 5{12},\frac 7{12},\frac{11}{12}$□$\phi(12)=4$□

$\frac 1{6},\frac 5{6}$□$\phi(6)=2$□

$\frac 1{4},\frac 3{4}$□$\phi(4)=2$□

$\frac 1{3},\frac{2}{3}$□$(3)=$2□

$\frac 12$□$\phi(2)=1$□

$\frac 11$□$\phi(1)=1$□

根据$id=1*\phi$□有$\phi=id*\mu$

题目略（摸了，下次再补）

常用套路□$\sum_{i}\sum_{j}f(i,j)$变换为$\sum_{k}\sum_{i}\sum_{j}[f(i,j)==k]$这样拆出来，比如$f(i,j)=\gcd(i,j)$的时候拆出来比较容易进行反演之类的操作。

组合数学

需要注意的一个式子□$\sum_{i=L}^{R}C_{i}^{x}=C_{R+1}^{x+1}-C_L^{x+1}$□其实就是对$C_i^x=C_{i+1}^{x+1}-C_{i}^{x+1}$求和。