

# Contest Info

date: 2020.06.14 13:00-18:00

[practice link](#)

## Solutions

### C. Coefficient

题目大意：给定函数  $f(x)=\frac{b}{c+e^{ax+d}}$  ( $a \neq 0$ ) 求其在  $x_0=-\frac{d}{a}$  处泰勒展开第  $n$  项  $(x-x_0)^n$  的系数。答案对  $998,244,353$  取模。具体地说，给定一个  $n$  你需要回答  $q$  组询问，每次给出不同的  $a, b, c, d$  让你求答案。其中  $n, q \leq 5 \times 10^4$ 。

题解：令  $t=ax+d$  那么  $f(t)=\frac{b}{c+e^t}$  故  $f(x)$  的泰勒展开为  $f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f^{(i)}(t)t^i}{i!} = \frac{a^i f^{(i)}(t)(x-x_0)^i}{i!}$  所求系数即为  $a^n \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$  也就是  $f(t)$  的展开乘以  $a^n$ 。

首先讨论几种特殊情况。

- 若  $n=0$  那么系数为  $\frac{b}{c+1}$  其中  $c=-1$  时未定义。
- 否则，若  $c=-1$  那么  $f(t)=\frac{b}{-1+e^t}$  同样可以证明其各阶导数均未定义。
- 否则，若  $c=0$  那么  $f(t)=\frac{b}{e^t}$   $t^n$  项系数为  $\frac{(-1)^n b}{n!}$ 。

接下来讨论一般情况。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{b}{c+e^t} = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{c})e^t} \\ &= \frac{b}{c} \sum_{i=0}^{+\infty} (-\frac{1}{c})^i e^{it} \end{aligned}$$

其  $t^n$  项系数为


$$\frac{b}{c} \sum_{i=0}^{+\infty} (-\frac{1}{c})^i \frac{i^n}{n!} = \frac{b}{cn!} \sum_{i=0}^{+\infty} (-\frac{1}{c})^i i^n$$

这时便可用上[这里](#)介绍的技巧求  $\sum_{i=0}^{+\infty} (-\frac{1}{c})^i i^n$  由于  $\lim_{m \rightarrow \infty} u^m F(m) = 0$  因而答案的极限为  $-F(0)$  令  $F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-\frac{1}{c})^i i^n x^i$  可得方程

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{+\infty} (-\frac{1}{c})^i (i+1) \frac{f(i+x)}{u^{i+1}} \\ &= (\frac{u-1}{u})^{n+1} x + \sum_{i=1}^{+\infty} u^i i^n \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{u^{j+1}} \\ &= (\frac{u-1}{u})^{n+1} x + \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{u^{j+1}} \\ &= (\frac{u-1}{u})^{n+1} x + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{u^{i+1}} \sum_{j=i}^{+\infty} (-1)^j \binom{n+1}{j} (-j)^n = 0 \end{aligned}$$

注意到常数项是关于  $\frac{1}{u}$  的多项式，那么可以在  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$  多点求值求出所有常数项。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2019-hdu-multi-2&rev=1592157725> 

Last update: **2020/06/15 02:02**