

Contest Info

date: 2021.01.23 ??:??-?:??

[practice link](#)

Solutions

B. Lady Layton and Stone Game

题目大意：有若干堆石子，每次可以取若干堆合并在一起，代价为合并后堆的大小。但是，堆数必须在 L 和 R 之间。求最小代价。

题解：显然每次合并时都会取最小的那几堆。假设两次相邻的合并分别取了 x 堆和 y 堆，若 $x > y$ 或 $x \leq y$ 但是 $x-1$ 和 $y+1$ 合法，那么可以证明交换 x, y 或者 $x-1, y+1$ 这样合并一定更优：

- 若 $\sum_{i=1}^x a_i \leq a_{x+y}$ 那么前者代价为 $\sum_{i=1}^x a_i + \sum_{i=1}^{x+y-1} a_i$ 后者代价为 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i + \sum_{i=1}^{x+y-1} a_i$ 此后两个序列变得相同。因此 $x-1, y+1$ 更优。
- 否则，若 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i \leq a_{x+y}$ 那么前者合并再次的代价为 $\sum_{i=1}^x a_i + \sum_{i=x+1}^{x+y} a_i$ 后者合并两次代价为 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i + \sum_{i=1}^{x+y-1} a_i$ 后者代价更小。而合并完成之后，前者得到了 $\sum_{i=1}^x a_i$ 与 $\sum_{i=x+1}^{x+y} a_i$ 后者得到了 $\sum_{i=1}^{x+y-1} a_i$ 与 a_{x+y} 由于 $a_{x+y} < \sum_{i=1}^x a_i$ 且 $a_{x+y} \leq \sum_{i=x+1}^{x+y} a_i$ 因此后者的序列前缀和总是小于前者。可以证明在这一前提下，在任意的合并树下，后者的代价总比前者要优。因此 $x-1, y+1$ 更优。
- 否则，即 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i > a_{x+y}$ 那么前者合并再次的代价为 $\sum_{i=1}^x a_i + \sum_{i=x+1}^{x+y} a_i$ 后者合并两次代价为 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i + \sum_{i=x}^{x+y} a_i$ 两者相同。而合并完成之后，前者得到了 $\sum_{i=1}^x a_i$ 与 $\sum_{i=x+1}^{x+y} a_i$ 后者得到了 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i$ 与 $\sum_{i=x}^{x+y} a_i$ 若 $x \leq y$ 显然 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i \leq \sum_{i=1}^x a_i$ 且 $\sum_{i=1}^{x-1} a_i \leq \sum_{i=x+1}^{x+y} a_i$ 与上一种情况相同。而若 $x > y$ 考虑交换 x, y 并且不妨钦定第二种情况先合并成 $\sum_{i=1}^y a_i$ 与 $\sum_{i=y+1}^{x+y} a_i$ 容易证明这样还是更优。

因此合并的过程一定可以表示成 $L, L, L, \dots, L, t, R, R, R, \dots, R$ 考虑两个序列 A 和 B 其中 B 的 R 更多/ L 更少。显然可以从 A 通过一些 $-1/+1$ 操作得到 B B 更优。

确定序列后，可以用一个队列直接暴力模拟，老题了。

K. Game on a Circle

题目大意：有 n 颗石子排成一个环，从石子 1 开始遍历，每遇到一颗石子，有 p 的概率把它删除。对于石子 c 问它第 $1, 2, \dots, n$ 个被删除的概率。

题解：先讲一个等下要用的式子。令 $x = (1-p)^t$ 那么

$$\sum_{t=0}^{+\infty} x^t = \sum_{t=0}^{+\infty} \left((1-p)^t \right)^t = \frac{1}{1-(1-p)^e} \quad \square$$

找到一个很妙的做法。考虑容斥，设 f_i 表示 c 后面恰有 i 个石子的概率，那么

$$f_i = \sum_{|T| \geq i, T \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{c\}} (-1)^{|T|-i} \binom{|T|}{i} g_T \quad \square$$

其中 g_T 表示 T 中石子都在 c 之后的概率。

那么我们只需要考虑 $T \cup \{c\}$ 这个集合，甚至只需要关心 T 中有几个在 $[1, c-1]$ 有几个在 $[c+1, n]$ 即可。

设有 i 个在 $[1, c-1]$ j 个在 $[c+1, n]$ 那么这样的 T 有 $\binom{c-1}{i} \binom{n-c}{j}$ 个，合法的概率为（设 c 在第 t 轮删除）：

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \left((1-p)^{t+1} \right)^i \left((1-p)^t \right)^{j+1} p = \frac{p(1-p)^i}{1-(1-p)^{i+j+1}} \quad \square$$

显然可以卷积求出 g 然后再卷积求出 f 即可。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020-hdu-multi-3>

Last update: 2021/08/27 17:46

