

# Contest Info

date: 2020.07.12 12:00-17:00

[practice link](#)

## Solutions

### B. Infinite Tree

题目大意：在  $N^{\{+\}}$  上定义一棵树  $n$  的父亲为  $\frac{n}{\min n}$  有一个权值数组  $w$  求  $\sum_{i=1}^m w_i \cdot \text{dis}(u, i!)$

题解  $\text{dis}(u, v) = \text{dep}(u) + \text{dep}(v) - 2 \cdot \text{dep}(\text{lca}(u, v))$  如果能建出虚树，那么一次 dfs 就能求解。

考虑建虚树的过程，与普通虚树唯一不同的地方在于求  $(i-1)!$  和  $i!$  的 lca。将  $i!$  分解，考虑其中最大的质因子，易见在该质因子之后  $(i-1)!$  和  $i!$  就分岔了。这样一来，可以用树状数组维护每个质因子的数量，而 lca 的深度即为  $(i-1)!$  中大于等于  $i!$  最大质因子的数量。

### C. Domino

论文题。

### D. Quadratic Form

题目大意：给出正定矩阵  $A$  求满足  $\|Ax\|_1 \leq 1$  的条件下  $\max_{\|Ax\|_1 \leq 1} \|b^T Ax\|$

题解：注意原问题对称，将其转化为最小值，直接 KKT 条件暴解。需要满足的条件是：

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \mu \nabla g(x) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

其中

$$f(x) = \|b^T Ax\|, \quad g(x) = \|Ax\|_1 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(d^T g) &= \text{tr}(d^T (Ax)) \\ &= \text{tr}(d^T Ax) + \text{tr}(Ax^T d) \\ &= \text{tr}((d^T A)x) + \text{tr}(x^T A d) \end{aligned}$$

```
athrm{d}\boldsymbol{x})\|
&=\text{tr}((A\boldsymbol{x})^T\mathrm{d}\boldsymbol{x})+\text{tr}(\boldsymbol{x}^TA\mathrm{d}\boldsymbol{x})\|
athrm{d}\boldsymbol{x})\|
&=\text{tr}(\boldsymbol{x}^TA^T\mathrm{d}\boldsymbol{x})+\text{tr}(\boldsymbol{x}^TA\mathrm{d}\boldsymbol{x})\|
A\mathrm{d}\boldsymbol{x})\|
&=\text{tr}(\boldsymbol{x}^T(A^T+A)\mathrm{d}\boldsymbol{x}) \end{aligned} $$
```

而  
$$g = \left( \left( \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \right)^T \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)$$
对比系数有  
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x}$$
可得  
$$\boldsymbol{b} + 2\mu A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
若  $\mu = 0$  那么必然有  
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
除此以外  $\mu > 0$  因而  $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$   
又有  $\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2\mu}A^{-1}\boldsymbol{b}$ 可得

```
$$ \begin{aligned} &\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{4\mu^2}\boldsymbol{b}^TA^{-1}AA^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \frac{1}{4\mu^2}\boldsymbol{b}^TA^{-1}\boldsymbol{b} = 1 \end{aligned} $$
```

因而  $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{b}^TA^{-1}\boldsymbol{b}}$ 代入得极小值为  $-\sqrt{\boldsymbol{b}^TA^{-1}\boldsymbol{b}}$

## E. Counting Spanning Trees

论文题。

## F. Infinite String Comparison

题目大意：给两个字符串，问它们分别无限循环后是否相等。

题解：考虑前  $|a|+|b|$  个字符，若无失配，显然  $|a|, |b|$  分别是它的周期，根据弱周期引理  $\gcd(|a|, |b|)$  也是它的周期，显然永远相等。

## G. BaXianGuoHai, GeXianShenTong

$(\text{mod}+1)(\text{mod}-1)$  似乎是周期，但是不会证。然后卡常就过了。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020-nowcoder-multi-1&rev=1594746731>

Last update: 2020/07/15 01:12