# Contest Info

date: 2020.07.12 12:00-17:00

practice link

# Solutions

## A. B-Suffix Array

## B. Infinite Tree

**题目大意**：在 $N^{+}$ 上定义一棵树□$n$ 的父亲为 $\frac{n}{\min n}$□有一个权值数组 $w$□求 $\min_{u}\sum_{i=1}^{m}w_{i}\cdot\text{dis}(u,i!)$□

**题解**□$\text{dis}(u,v)=\text{dep}(u)+\text{dep}(v)-2\text{dep}(u,v)$□如果能建出虚树，那么一次 `dfs` 就能求解。

考虑建虚树的过程，与普通虚树唯一不同的地方在于求 $(i-1)!$ 和 $i!$ 的 `lca`。将 $i$ 分解，考虑其中最大的质因子，易见在该质因子之后 $(i-1)!$ 和 $i!$ 就分岔了。这样一来，可以用树状数组维护每个质因子的数量，而 `lca` 的深度即为 $(i-1)!$ 中大于等于 $i$ 最大质因子的数量。

## C. Domino

论文题。

## D. Quadratic Form

**题目大意**：给出正定矩阵 $A$□求满足 $\boldsymbol{x}^{T}A\boldsymbol{x}\le1$ 的条件下□$\max_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{b}^{T}\boldsymbol{x}$□

**题解**：注意原问题对称，将其转化为最小值，直接 KKT 条件暴解。需要满足的条件是：

$$ \begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x})+\mu\nabla g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\\ \mu g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\\ \mu\ge0\\ g(\boldsymbol{x})\le0\\ \end{cases} $$

其中 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}^{T}\boldsymbol{x}$□$g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{T}A\boldsymbol{x}-1$□

$$ \begin{aligned}
\text{tr}(\mathrm{d}g)&=\text{tr}(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{T}A\boldsymbol{x}))\\

&=\text{tr}(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{T})A\boldsymbol{x})+\text{tr}(\boldsymbol{x}^{T}A\mathrm{d}\boldsymbol{x})\\
&=\text{tr}((\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{T}A\boldsymbol{x})+\text{tr}(\boldsymbol{x}^{T}A\mathrm{d}\boldsymbol{x})\\
&=\text{tr}((A\boldsymbol{x})^{T}\mathrm{d}\boldsymbol{x})+\text{tr}(\boldsymbol{x}^{T}A\mathrm{d}\boldsymbol{x})\\
&=\text{tr}(\boldsymbol{x}^{T}A^{T}\mathrm{d}\boldsymbol{x})+\text{tr}(\boldsymbol{x}^{T}A\mathrm{d}\boldsymbol{x})\\
&=\text{tr}(\boldsymbol{x}^{T}(A^{T}+A)\mathrm{d}\boldsymbol{x}) \end{aligned} $$

而 $\mathrm{d}g=\text{tr}\left(\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)^{T}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)$□对比系数有 $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=2A\boldsymbol{x}$□可得 $\boldsymbol{b}+2\mu A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$□若 $\mu=0$□那么必然有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$□除此以外□$\mu>0$□因而 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$□又有 $\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2\mu}A^{-1}\boldsymbol{b}$□可得

$$ \begin{aligned} &\boldsymbol{x}^{T}A\boldsymbol{x}\\
=&\frac{1}{4\mu^{2}}\boldsymbol{b}^{T}A^{-1}AA^{-1}\boldsymbol{b}\\
=&\frac{1}{4\mu^{2}}\boldsymbol{b}^{T}A^{-1}\boldsymbol{b}=1 \end{aligned} $$

因而□$\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{b}^{T}A^{-1}\boldsymbol{b}}$□代入得极小值为 $-\sqrt{\boldsymbol{b}^{T}A^{-1}\boldsymbol{b}}$□

## E. Counting Spanning Trees

论文题。

## F. Infinite String Comparision

**题目大意**：给两个字符串，问它们分别无限循环后是否相等。

**题解**：考虑前 $|a|+|b|$ 个字符，若无失配，显然 $|a|,|b|$ 分别是它的周期，根据弱周期引理□$\gcd(|a|,|b|)$ 也是它的周期，显然永远相等。

## G. BaXianGuoHai, GeXianShenTong

$(\text{mod}+1)(\text{mod}-1)$ 似乎是周期，但是不会证。然后卡常就过了。

## H. Minimum-cost Flow

# I. 1 or 2

# J. Easy Integration