

# Contest Info

date: 2020.07.12 12:00-17:00

[practice link](#)

## Solutions

### A. B-Suffix Array

题目大意：定义一个字符串的 B 函数为字符串到相同长度非负整数序列的映射，第  $i$  个整数表示字符串中在  $i$  前面与  $i$  字符相同的字符之间的最小距离，如果前面没有和自己一样的字符则记为 0。求每个后缀的 B 序列的排名。

题解：由于字符集大小最大为 2，会发现经过函数 B 计算后，最多只会有俩 0，第一个字符对应的 B 必然是 0，接下来与第一个字符不同的位置上对应的 B 也是 0。

那么在所有的后缀中，函数值的两个 0 靠的越近，排名越靠前；如果没有第二个零，那可以假装末尾有个零，但是排名的时候要尽可能靠前。

而对于两个 0 之后的序列的字典序大小关系，容易发现由于两个字符都出现过了，那么 0 之后的 B 即相应位置上前面与自己相同的字符的距离，不再会有变化。所以记后缀  $s_{\{a \dots n\}}$  的 B 序列中两个 0 的距离为  $i$ ，那么后面的 B 序列与原串的 B 对应的后缀是相同的，即  $B(s_{\{a \dots n\}})_{\{l+1 \dots n-a\}} = B(s_{\{a+l+1 \dots n\}})$

综上，我们首先计算一下原串的 B，然后用后缀数组对 B 序列的后缀进行排序。接下来对于每个后缀  $s_{\{a \dots n\}}$  第一关键字为该后缀中最靠前的两个不同的字符的距离（即对应 B 序列中两个 0 的距离）；第二关键字当后缀全是相同的字符时为 0，否则为 1，用来保证 B 序列实际没有第二个 0 的情况下，让较短的该后缀排名尽量靠前；第三关键字即为  $B(s_{\{a+l+1 \dots n\}})$  在原串 B 序列的后缀中的排名。排序。

### B. Infinite Tree

题目大意：在  $\mathbb{N}^{\{+\}}$  上定义一棵树， $n$  的父亲为  $\frac{n}{\min n}$ ，有一个权值数组  $w$  求  $\sum_{i=1}^m w_i \cdot \text{dis}(u, i)$

题解  $\text{dis}(u, v) = \text{dep}(u) + \text{dep}(v) - 2 \cdot \text{dep}(\text{lca}(u, v))$  如果能建出虚树，那么一次 dfs 就能求解。

考虑建虚树的过程，与普通虚树唯一不同的地方在于求  $(i-1)!$  和  $i!$  的 lca。将  $i!$  分解，考虑其中最大的质因子，易见在该质因子之后  $(i-1)!$  和  $i!$  就分岔了。这样一来，可以用树状数组维护每个质因子的数量，而 lca 的深度即为  $(i-1)!$  中大于等于  $i!$  最大质因子的数量。

## C. Domino

论文题。

## D. Quadratic Form

题目大意：给出正定矩阵  $A$  求满足  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 1$  的条件下  $\max_{\mathbf{x}} \mathbf{b}^T \mathbf{x}$

题解：注意原问题对称，将其转化为最小值，直接 KKT 条件暴解。需要满足的条件是：

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) + \mu \nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mu g(\mathbf{x}) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

其中

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{d}g) &= \text{tr}(\mathbf{d}(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})) \\ &= \text{tr}(\mathbf{d}(\mathbf{x}^T A \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d})) \\ &= \text{tr}(\mathbf{d} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{d} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{d} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{d} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \end{aligned}$$

而  $\mathbf{d}g = \text{tr}(\left(\frac{\mathbf{d}g}{\mathbf{d}\mathbf{x}}\right)^T \mathbf{d}\mathbf{x})$  对比系数有

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}g}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x} &= 2A \mathbf{x} \quad \text{可得} \\ \mathbf{b} + 2\mu A \mathbf{x} &= \mathbf{0} \quad \text{若 } \mu = 0 \text{ 那么必然有} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{0} \quad \text{除此以外 } \mu > 0 \text{ 因而 } g(\mathbf{x}) = 0 \\ \text{又有 } \mathbf{x} &= -\frac{1}{2\mu} A^{-1} \mathbf{b} \quad \text{可得} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{4\mu^2} \mathbf{b}^T A^{-1} A A^{-1} \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{4\mu^2} \mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} = 1 \end{aligned}$$

因而  $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b}}$  代入得极小值为  $-\sqrt{\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b}}$

## E. Counting Spanning Trees

论文题。

## F. Infinite String Comparison

题目大意：给两个字符串，问它们分别无限循环后是否相等。

题解：考虑前  $|a|+|b|$  个字符，若无失配，显然  $|a|,|b|$  分别是它的周期，根据弱周期引理  $\gcd(|a|,|b|)$  也是它的周期，显然永远相等。

## G. BaXianGuoHai, GeXianShenTong

$(\text{mod}+1)(\text{mod}-1)$  似乎是周期，但是不会证。然后卡常就过了。

## H. Minimum-cost Flow

## I. 1 or 2

## J. Easy Integration

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020-nowcoder-multi-1&rev=1594906791>

Last update: 2020/07/16 21:39