

Contest Info

date: 2020.07.12 12:00-17:00

[practice link](#)

Solutions

A. B-Suffix Array

题目大意：定义一个字符串的 B 函数为字符串到相同长度非负整数序列的映射，第 i 个整数表示字符串中在 i 前面与 i 字符相同的字符之间的最小距离，如果前面没有和自己一样的字符则记为 0。求每个后缀的 B 序列的排名。

题解：由于字符集大小最大为 2，会发现经过函数 B 计算后，最多只会有俩 0，第一个字符对应的 B 必然是 0，接下来与第一个字符不同的位置上对应的 B 也是 0。

那么在所有的后缀中，函数值的两个 0 靠的越近，排名越靠前；如果没有第二个零，那可以假装末尾有个零，但是排名的时候要尽可能靠前。

而对于两个 0 之后的序列的字典序大小关系，容易发现由于两个字符都出现过了，那么 0 之后的 B 即相应位置上前面与自己相同的字符的距离，不再会有变化。所以记后缀 $s_{\{a \dots n\}}$ 的 B 序列中两个 0 的距离为 l ，那么后面的 B 序列与原串的 B 对应的后缀是相同的，即 $B(s_{\{a \dots n\}})_{\{l+1 \dots n-a\}} = B(s_{\{a+l+1 \dots n\}})$

综上，我们首先计算一下原串的 B，然后用后缀数组对 B 序列的后缀进行排序。接下来对于每个后缀 $s_{\{a \dots n\}}$ 第一关键字为该后缀中最靠前的两个不同的字符的距离（即对应 B 序列中两个 0 的距离）；第二关键字当后缀全是相同的字符时为 0，否则为 1，用来保证 B 序列实际没有第二个 0 的情况下，让较短的该后缀排名尽量靠前；第三关键字即为 $B(s_{\{a+l+1 \dots n\}})$ 在原串 B 序列的后缀中的排名。排序。

B. Infinite Tree

题目大意：在 $\mathbb{N}^{\{+\}}$ 上定义一棵树， n 的父亲为 $\frac{n}{\min n}$ ，有一个权值数组 w 求 $\sum_{i=1}^m w_i \cdot \text{dis}(u, i)$

题解 $\text{dis}(u, v) = \text{dep}(u) + \text{dep}(v) - 2 \cdot \text{dep}(\text{lca}(u, v))$ 如果能建出虚树，那么一次 dfs 就能求解。

考虑建虚树的过程，与普通虚树唯一不同的地方在于求 $(i-1)!$ 和 $i!$ 的 lca。将 $i!$ 分解，考虑其中最大的质因子，易见在该质因子之后 $(i-1)!$ 和 $i!$ 就分岔了。这样一来，可以用树状数组维护每个质因子的数量，而 lca 的深度即为 $(i-1)!$ 中大于等于 $i!$ 最大质因子的数量。

C. Domino

论文题。

D. Quadratic Form

题目大意：给出正定矩阵 A 求满足 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 1$ 的条件下 $\max_{\mathbf{x}} \mathbf{b}^T \mathbf{x}$

题解：注意原问题对称，将其转化为最小值，直接 KKT 条件暴解。需要满足的条件是：

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) + \mu \nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mu g(\mathbf{x}) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

其中

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{d}g) &= \text{tr}(\mathbf{d}(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})) \\ &= \text{tr}(\mathbf{d}(\mathbf{x}^T A \mathbf{x}) + \mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{d} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \\ &= \text{tr}((A \mathbf{x})^T \mathbf{d} \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d} \mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{x}^T A \mathbf{d}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{x}^T (A \mathbf{d} + A) \mathbf{x}) \end{aligned}$$

而 $\mathbf{d}g = \text{tr}(\left(\left(\frac{\mathbf{d}g}{\mathbf{d}\mathbf{x}}\right)^T \mathbf{d}\mathbf{x}\right)^T \mathbf{d}\mathbf{x})$ 对比系数有

$$\frac{\mathbf{d}g}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{d}\mathbf{x} = 2A \mathbf{x} \quad \text{可得}$$

$$\mathbf{b} + 2\mu A \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{若 } \mu = 0 \text{ 那么必然有}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{除此以外 } \mu > 0 \text{ 因而 } g(\mathbf{x}) = 0$$

$$\text{又有 } \mathbf{x} = -\frac{1}{2\mu} A^{-1} \mathbf{b} \quad \text{可得}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{4\mu^2} \mathbf{b}^T A^{-1} A A^{-1} \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{4\mu^2} \mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} = 1 \end{aligned}$$

因而 $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b}}$ 代入得极小值为 $-\sqrt{\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b}}$

E. Counting Spanning Trees

论文题。

F. Infinite String Comparison

题目大意：给两个字符串，问它们分别无限循环后是否相等。

题解：考虑前 $|a|+|b|$ 个字符，若无失配，显然 $|a|,|b|$ 分别是它的周期，根据弱周期引理 $\gcd(|a|,|b|)$ 也是它的周期，显然永远相等。

G. BaXianGuoHai, GeXianShenTong

$(\text{mod}+1)(\text{mod}-1)$ 似乎是周期，但是不会证。然后卡常就过了。

H. Minimum-cost Flow

题目大意：给个费用流的图，费用知道但是边的容量不知道，不过边的容量都一样。多次询问，问如果边的容量变成了分数 u_i/v_i 从源到汇跑一个单位的流量的最小费用是多少。

题解：由于边的容量是相同的，考虑边的容量确定为 a 后，在图上进行多次增广。容易发现只要能找到一条增广路，必然能跑出恰好 a 份的流量，且是当前能走的增广路中，费用最小的。图没有负边权所以不用担心负环。

那既然每次增广跑走的流量也是相同的，而且等于边的容量，那我们直接以 1 为容量跑跑费用流，记录一下每次增广时的费用。

对于询问 u_i/v_i 若大于或等于 1 那我们直接用第一次增广时的费用回答就好；如果为 0，那没得跑；如果小于 1，那么我们肯定得先增广 $\lfloor v_i/u_i \rfloor$ 次，需要求前面这些增广时的费用和，然后剩下的一点点流量再用劣一点的增广路跑完流量即可。

I. 1 or 2

题目大意：给一个无向图，然后每个点给一个 1 或 2 的数 d_u 问有没有办法能干掉若干条边，使得新的图中，每个点的度数和给的数相同。

题解：最后的图必然是一些链和一些环，链的两端的 d_u 必然都是 1，剩下的都是 2。

考虑第 i 条边选或不选，即变量 $x_i \in \{0, 1\}$ 对于每个点 u 我们有 $\sum_{e_i \text{ incident to } u} x_i = d_u$ 该方程组有 0/1 的解则意味着原图能有一个方案满足度数的限制。

由于每个变量恰好只会在两个不同的方程中出现，考虑解改方程的过程，若选择了一条边，则说明我们用一个变量，盖住了两个方程右边的某个单位“1”。每个方程右边的每个单位“1”只能被一个变量盖到。该过程实际上就和一般图的匹配很像了。

因此一个建立一般图匹配的方式，即将每个变量看做是匹配中的两个点、每个方程看做是匹配中的 d_u 个点。在第 i 条边不选的情况下，我们让变量 x_i 对应的两个点匹配上；第 i 条边选的情况下，我们让变量 x_i 对应的两个点，分别匹配到两个不同的方程所对应的点上。

为了避免出现变量的两个点均与同一个方程对应的两个点匹配上，我们强制要求其中一个方程的两个点，只与变量的某个点相连，另一个方程的两个点只与变量另一个点相连。

综上，建立的匹配模型为，每条边拆成两个点 e, e' 每个点拆成 d_u 个点 e 和 e' 建边。对于连接 u, v 的边，则让 u 拆的点与 e 建边 v 拆的点与 e' 建边。

这样该匹配模型有完美匹配的情况下，就等价于前面的方程组有一组合法的解，也就等价于有一种删边的方案满足度数限制。

J. Easy Integration

题目大意：求 $\int_0^1 \left(x - x^2\right)^n \mathrm{d}x$ 是个有理数，给出模意义下的值。

题解 $\left(x - x^2\right)^n = x^n (1-x)^n$ 那我们记 $v_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b \mathrm{d}x$

$$v_{a,0} = \int_0^1 x^a \mathrm{d}x = 1 / (a + 1)$$

$$\begin{aligned} v_{a,b} &= \int_0^1 x^a (1-x)^b \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{a+1} x^{a+1} (1-x)^b \right) \Big|_0^1 + \frac{b}{a+1} \int_0^1 x^{a+1} (1-x)^{b-1} \mathrm{d}x \\ &= \frac{b}{a+1} v_{a+1,b-1} \\ &= \frac{b!}{a! (a+b)!} v_{a+b,0} \\ &= \frac{b!}{a! (a+b+1)!} \end{aligned}$$

答案即为 $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020-nowcoder-multi-1&rev=1594910400>

Last update: 2020/07/16 22:40