

## G. Math Test

对不起，我数学太差了。

**题目大意：**给定  $1 \leq a \leq 10^{18}$  和  $1 \leq n \leq 10^{18}$  求有多少  $1 \leq x \leq y \leq n$  满足  $\gcd(x,y) = 1 \wedge x \mid y^2 + a \wedge y \mid x^2 + a$  有  $10^{18}$  组询问。

**题解：**对于一组满足要求的  $x, y$  可以证明  $y \mid \frac{y^2 + a}{x^2 + a} \cdot x$  也满足要求。

$$\begin{aligned} & \$ \begin{aligned} & \left( \frac{y^2 + a}{x^2 + a} \cdot x \right)^2 + a \\ & = \frac{y^4 + 2ay^2 + a^2 + ax^2 + 2ax}{x^4 + 2x^2 + a} \cdot x^2 \\ & = \frac{y^4 + 2ay^2 + a(x^2 + a)}{x^4 + 2x^2 + a} \end{aligned} \$ \\ & \text{显然能被 } y \text{ 整除。假设质数 } p \text{ 满足 } p \mid y, p \nmid \frac{y^2 + a}{x^2 + a} \cdot x \text{ 那么 } p \mid a \text{ 又 } \\ & p \nmid x^2 + a \text{ 因此 } p \mid x \text{ 矛盾。因而 } \gcd(y, \frac{y^2 + a}{x^2 + a} \cdot x) = 1 \end{aligned}$$

反过来  $\frac{x^2 + a}{y^2 + a} \cdot y$  也满足要求。容易发现这两个变换互为逆变换。显然  $y \mid \frac{y^2 + a}{x^2 + a} \cdot x$  仍然成立，而逆变换则不一定成立。我们显然每个合法的对一直逆变换，直到  $\frac{x^2 + a}{y^2 + a} > x$  为止。所有合法对都可以通过这样的对变换得到。

要使  $x \leq y$  而  $\frac{x^2 + a}{y^2 + a} > x$  那么就有  $x(y-x) < a$  那么这样的  $x, y$  对只有  $a \log a$  个。然后  $a$  则解个同余方程即可，合法的  $x, y, a$  对约两百多万个。于是我们可以把全部表打出来，这个数字应该是  $19491555$  个，对每个询问二分查询。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidsword:2020-nowcoder-multi-10>

Last update: 2021/06/19 23:24