

G. Math Test

对不起，我数学太差了。

题目大意：给定 $1 \leq a \leq 10^5$ 和 $1 \leq n \leq 10^{18}$ 求有多少 $1 \leq x \leq y \leq n$ 满足 $\gcd(x, y) = 1$ 且 $x \mid y^2 + a$ 且 $y \mid x^2 + a$ 有 10^6 组询问。

题解：对于一组满足要求的 x, y 可以证明 $y, \frac{y^2 + a}{x}$ 也满足要求。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y^2 + a}{x} \right)^2 + a \\ &= \frac{y^4 + 2ay^2 + a^2 + ax^2}{x^2} \\ &= \frac{y^4 + 2ay^2 + a(x^2 + a)}{x^2} \end{aligned}$$

显然能被 y 整除。假设质数 p 满足 $p \mid y, p \mid \frac{y^2 + a}{x}$ 那么 $p \mid a$ 又 $y \mid x^2 + a$ 因此 $p \mid x$ 矛盾。因而 $\gcd(y, \frac{y^2 + a}{x}) = 1$

反过来 $\frac{x^2 + a}{y}, x$ 也满足要求。容易发现这两个变换互为逆变换。显然 $y \leq \frac{y^2 + a}{x}$ 仍然成立，而逆变换则不一定成立。我们显然每个合法的对一直逆变换，直到 $\frac{x^2 + a}{y} > x$ 为止。所有合法对都可以通过这样的对变换得到。

要使 $x \leq y$ 而 $\frac{x^2 + a}{y} > x$ 那么就有 $x(y - x) < a$ 那么这样的 x, y 对只有 $a \log a$ 个。然后 a 则解个同余方程即可，合法的 x, y, a 对约两百多万个。于是我们可以把全部表打出来，这个数字应该是 19491555 个，对每个询问二分查询。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020-nowcoder-multi-10>

Last update: 2021/06/19 23:24