

Contest Info

date: 2020-08-03 12:00~17:00

2020牛客暑期多校训练营（第八场）

Solutions

D. Disgusting Relationship

题目大意：对于一个 n 和 $a_1, \dots, a_n$ 定义 $f(a_1, \dots, a_n)$ 表示对每个 i 满足长为 i 的环恰有 a_i 个的 n 的不同排列数。求满足 $f(a_1, \dots, a_n)$ 不能被 p 整除的 $\{a\}$ 的数量。

题解：首先求 f 这个比较简单，就是先枚举环的位置，乘上每个环内部的不同循环次数，最后再对相同长度去重。

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i!)^{a_i}} \cdot \prod_{i=1}^n ((i-1)!)^{a_i} \\ &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^n i^{a_i}} \cdot \prod_{i=1}^n a_i! \end{aligned}$$

从第一个等号可以看出，要使原式不被 p 整除，环长至多为 p 我们继续简化式子：

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^p i^{a_i}} \cdot \prod_{i=1}^p a_i! \\ &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{p-1} i^{a_i} a_i!} \cdot p^{a_p} \end{aligned}$$

注意到对于 $1 \leq i \leq p-1$ 它们的任意次方都不被 p 整除。因而原式中 p 的数量等价于下式：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{p-1} a_i! \cdot (p a_p)!}$$

从该式中可以直观地感受到 $2 \leq i \leq p-1$ 的环数量不能太多，因为它们会导致分母中的 p 成比例减少，从而使得式子被 p 整除。

我们来证明 $t = a_1 \bmod p + \sum_{i=2}^{p-1} i a_i < p$ 另外定义

$s = p \lfloor \frac{a_1}{p} \rfloor$ 考虑 $\frac{n!}{s! t! (p a_p)!}$ 由于 $s + t + p a_p = n$ 该式为整数。我们证明在 $t \geq p$ 时，原式包含比该式更多的质因子 p 也即证明原式分母比该式包含严格更少的质因子 p

首先，若某个 $i a_i \geq p$ 考虑 $a_i!$ 和 $(i a_i)!$ 容易证明前者到后者之间至少能出现一次质因子 p 命题已证毕。否则：

根据 kumor 定理 $a!b!$ 中 p 的数量不超过 $(a+b)!$ 中 p 的数量，少的个数为 $a+b$ 在 p 进制下发生进位的次数。因此

$$\begin{aligned} &a_1! \cdot \prod_{i=2}^{p-1} a_i! \cdot \prod_{i=1}^p a_i! \leq \prod_{i=1}^p (a_i + a_i)! \\ &= \prod_{i=1}^p (2 a_i)! \end{aligned}$$

最后一个地方不能取等号是因为，式中每一项均小于 p 而加起来的 t 却 $\geq p$ 那么过程中必然发生了至少一次进位。

在该必要条件满足的前提下，由于 $p \mid pa_p$ 只能等于 $n \bmod p$ 容易证明，只要再满足 s 和 pa_p 做加法时不发生进位，就是充要条件了。

计数时 t 可以任意划分给 $1 \sim p-1$ 因此需要预处理划分数 $n-t$ 按位分配给 1 和 p 即可，比较简单。

时间复杂度 $\mathcal{O}(p\sqrt{p} + T\log n)$

H. Hard String Problem

题目大意：给你 n 个串，但是每个串实际上是所给串的无限循环。求公共子串数量。

题解：首先注意到，每个串可以简化为最小循环，并转换为最小表示。相同的串可以删除。如果此时只剩一个串了，那么自然有无限个串。否则，考虑最短的串 s 和 t 如果它们有一个长度 $\geq |s| + |t|$ 的公共子串，根据弱周期引理 $\gcd(|s|, |t|)$ 也是它们的周期，那么假如 $|s| \neq |t|$ 与最小循环矛盾；否则与 $s \neq t$ 矛盾。因此公共子串最长为 $|s| + |t| - 1$ 这时将每个串循环几遍，使得包括所有这么长的子串即可。容易发现，除 s, t 外的串长度至多变为原来的 3 倍，因而仍能保证总串长，变为了经典 SAM 题。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020-nowcoder-multi-8>

Last update: 2020/08/05 11:45