Contest Info

date: 2020-08-03 12:00~17:00

2020牛客暑期多校训练营（第八场）

Solutions

D. Disgusting Relationship

题目大意：对于一个 n 和 $a_{1},\cdots,a_{n}$□定义 $f(a_{1},\cdots,a_{n})$ 表示对每个 i 满足长为 i 的环恰有 a_{i} 个的 n 的不同排列数。求满足 $f(a_{1},\cdots,a_{n})$ 不能被 p□p 为质数）整除的 $\{a\}$ 的数量。

题解：首先求 f□这个比较简单，就是先枚举环的位置，乘上每个环内部的不同循环次数，最后再对相同长度去重。

$$ \begin{aligned} f(a_{1},\cdots,a_{n})&=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i!)^{a_{i}}}\cdot\prod_{i=1}^{n}((i-1)!)^{a_{i}}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}a_{i}!}\\ &=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}i^{a_{i}}\cdot\prod_{i=1}^{n}a_{i}!} \end{aligned} $$

从第一个等号可以看出，要使原式不被 p 整除，环长至多为 p□我们继续简化式子：

$$ \begin{aligned} &=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{p}i^{a_{i}}\cdot\prod_{i=1}^{p}a_{i}!}\\ &=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{p-1}i^{a_{i}}a_{i}!\cdot p^{a_{p}}a_{p}!} \end{aligned} $$

注意到对于 $1\sim p-1$□它们的任意次方都不被 p 整除。因而原式中 p 的数量等价于下式：

$$ \frac{n!}{\prod_{i=1}^{p-1}a_{i}!\cdot(pa_{p})!} $$

从该式中可以直观地感受到□$2\sim p-1$ 的环数量不能太多，因为它们会导致分母中的 p 成比例减少，从而使得式子被 p 整除。

我们来证明□$t=a_{1}\bmod p+\sum_{i=2}^{p-1}ia_{i}<p$□另外定义 $s=p\lfloor\frac{a_{1}}{p}\rfloor$□考虑 $\frac{n!}{s!t!(pa_{p})!}$□由于 $s+t+pa_{p}=n$□该式为整数。我们证明在 $t\ge p$ 时，原式包含比该式更多的质因子 p□也即证明原式分母比该式包含严格更少的质因子 p□

首先，若某个 $ia_{i}\ge p$□考虑 $a_{i}!$ 和 $(ia_{i})!$□容易证明前者到后者之间至少能出现一次质因子 p□命题已证毕。否则：

根据 kumor 定理□$a!b!$ 中 p 的数量不超过 $(a+b)!$ 中 p 的数量，少的个数为 $a+b$ 在 p 进制下发生进位的次数。因此

$$ \begin{aligned} &a_{1}!\cdot\prod_{i=2}^{p-1}a_{i}!\\ \le_{p}&s!\cdot(a_{1}\bmod p)!\cdot\prod_{i=2}^{p-1}ia_{i}!\\ <_{p}&s!t! \end{aligned} $$

最后一个地方不能取等号是因为，式中每一项均小于 p□而加起来的 t 却 $\ge p$□那么过程中必然发生了至少一次进位。

在该必要条件满足的前提下，由于 $p\mid pa_{p}$□t 只能等于 $n\bmod p$□容易证明，只要再满足 s 和 pa_{p} 做加法时不发生进位，就是充要条件了。

计数时□t 可以任意划分给 $1\sim p-1$□因此需要预处理划分数□$n-t$ 按位分配给 1 和 p 即可，比较简单。

时间复杂度 $\mathcal{O}(p\sqrt{p}+T\log n)$□