团队

做毕设，摸了。

个人

zzh

pmxm

jsh

本周推荐

zzh

pmxm

jsh

错排问题（错位排列）

错排，是个时常会听到，但做到就有点抓瞎的东西。

原始的全错位排列问题的做法有很多种，但要记得了解到做法的本质，因为出题通常就是某种做法的本质没变，在条件上稍加改动而已。

具体的可参考 错排问题 - 维基百科 和 错排公式 - 百度百科。

牛客练习赛64 - D - 宝石装箱

题目链接

题意：

共 n 个编号的宝石和 n 个编号的箱子（$n \le 8000$）每个箱子要装有恰好一个宝石，但第 i 个宝石不能放在第 a_i 个箱子里。

问有多少种装箱的方案数。取模。

a_i 不是个排列，可能有重。

> 错排改了改，每个物品的限制虽然还是一个，但限制可能有重复。

范围上看 $\mathcal{O}(n^2)$ 就能过。

那我们考虑一下容斥，记 A_i 为每个箱子要装有恰好一个宝石的情况下，第 i 个宝石放在了第 a_i 个箱子的方案集合，方案数就是： \[{\displaystyle \left|\bigcap _{i=1}^{n}{\bar {A_{i}}}\right|=\left|S-\bigcup _{i=1}^{n}A_{i}\right|=|S|-\sum _{i=1}^{n}|A_{i}|+\sum _{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_{i}\cap A_{j}|-\cdots +(-1)^{n}|A_{1}\cap \cdots \cap A_{n}|}\]

哦天哪，我们把所有 j 个 A_i 的交集的大小的和，记为 S_j，即有 j 个宝石放错，其余随便放的方案数。问题的答案就是： \[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_i\]

这个 S_j 很好算。记第 i 个箱子有 b_i 个宝石不能放，那么对于放错宝石的数量贡献与否，可以得到多项式： \[\prod_{i} (1 + b_i x)\]

记展开的第 i 项系数为 c_i，即 i 个宝石放错的玩法。我们乘上其余宝石乱排的方案数，有 $S_i = c_i (n - i)!$。

那个多项式展开就是个背包，$\mathcal{O}(n^2)$ DP 一下，剩下的都好做。

zzh's comment：FFT 甚至可以做到 $\mathcal{O}(n\log^{2}n)$。