

## 团队

考试，摸了。

## 个人

zzh

pmxm

jsh

- 6/6 - [AtCoder Beginner Contest 163](#): pro: 6/6 rk: 14/?
- 6/7 - [Codeforces Round #648 \(Div. 2\)](#): pro: 6/6/7 rk: ?/?
- 6/10 - [AtCoder Beginner Contest 164](#): pro: 5/6/6 rk: 18/?
- 6/11 - [Educational Codeforces Round 89 \(Rated for Div. 2\)](#): pro: 5/5/7 rk: ?/?

## 本周推荐

zzh

pmxm

jsh

咱们的知识点里也有线段树合并，但是怎么没能证一下复杂度呢？那下面我先证明一下线段树合并的复杂度，然后介绍一个稍微复杂点的应用情况。

### 线段树合并

线段树合并，即将两个区间一致的节点所对应的线段树，合并为新的线段树，返回出新的节点。

合并操作通常用递归来实现，所以一般非叶子节点的操作是合并两个分支后更新信息。叶子则根据题目的需求来进行处理。

而为了保障复杂度，实现上，线段树需要懒惰申请节点，即只保存“有信息”的节点。所以当递归合并时，某个节点为 `nil` 则可以不再继续递归。

线段树合并可行的前提是，在合并之后，被合并的两个树的根，不再会作为合并操作中被操作的节点。

递归过程中，若两个节点均不为 `nil` 则说明要么是根，要么他们的父亲也均不为 `nil` 因此，合并时只要两个节点均不为 `nil` 则说明这两个节点不再会作为合并操作中被操作的节点。

由于是二叉树，递归到的节点也都是包括根的一个连通子图，所以“递归的总次数”和“递归过程中两个

节点均不为 nil 的次数 ” 同阶。

记第  $i$  次合并前，可以用于合并的根的数量为  $r_i$  记这些线段树总的节点数量为  $k_i$  (重复也算上)。显然  $r_{i+1} = r_i - 2 + 1$

考虑递归合并的过程中，两个节点均不为 nil 的情况，由于它们不会再被拿来合并，对于  $k_{i+1}$  的贡献就是  $-2 + 1 = -1$ 。因此  $k_i$  是递减的，且 “ 递归过程中两个节点均不为 nil 的次数 ”，恰好等于  $k_i - k_{i+1}$

综上，“ 递归过程中两个节点均不为 nil 的次数 ” 的总和  $(k_0 - k_1) + (k_1 - k_2) + \dots$  不会超过最初的节点的数量。

因此总的时间复杂度和最初的节点数量等阶，通常就是  $\mathcal{O}(n \log n)$  啦。

实现上如果确实合并掉的树没有用了，那合并时可以随便拿一个节点存信息，时间复杂度不变，空间也不用新开。而如果合并时均新建节点，旧的不删，则第  $i$  次合并时，新的节点数量也等于  $k_i - k_{i+1}$  总的新建的节点不超过最初的节点的数量。所以可持久化时开两倍就好。

## 应用

容易发现，合并的两个线段树，如果存储的信息中有 key 相同的，则绝对会递归到存这个位置信息的叶子上。

这是线段树合并最强大的性质，即我们能暴力对着公共 key 的信息进行操作。

### 例题 AtCoder Beginner Contest 163: F - path pass i

#### AtCoder Beginner Contest 163: F - path pass i

这个题目我的做法需要用到线段树合并。

#### 题意

题意为给一个节点有颜色的树，对于每种颜色  $k$  计算一下有多少个不同的简单路径，至少经过一次颜色为  $k$  的节点。

#### 我的做法

我的做法是在 DFS 的过程中，直接用线段树维护一下每个颜色作为 key 对应的不同的方案数。每次 DFS 完一个子树后，就把返回的线段树和当前节点维护的线段树 “ 想办法 ” 合并一下。

对于线段树  $A$  记对于颜色  $k$  记录的答案信息为  $a_{A, k}$  为了能维护答案，还需要用线段树记录当前根  $u$  的子树中，所有 “ 到当前根  $u$  的路上经过有颜色为  $k$  的节点 ” 的不同节点数量。记 “ 到  $u$  经过有颜色  $k$  节点 ” 的节点集合为  $C_{A, k}$  大小为  $c_{A, k}$  线段树只需要记录大小。

记当前 DFS 到的节点为  $u$  维护的线段树为  $A_u$  包括根，已经合并完的总节点集合为  $S_u$  数量为  $s_u$  再记刚 DFS 完的那个节点为  $v$  子树节点集合为  $S_v$  大小为  $s_v$  返回的线段树为  $A_v$

记接下来合并好的线段树为  $A'_u$  合并完的节点总数量为  $s'_u = s_u + s_v$

对于维护的答案，此时需要新增  $S_u$  和  $S_v$  之间，每对点形成的简单路径的贡献。对于颜色  $k$  的答案

$$a_{\{A'_u\}, k} = a_{\{A_u\}, k} + a_{\{A_v\}, k} + c_{\{A_u\}, k} * s_v + c_{\{A_v\}, k} * s_u - c_{\{A_u\}, k} * c_{\{A_v\}, k}$$

其中减掉一些信息，是因为  $C_{\{A_u\}, k}$  和  $C_{\{A_v\}, k}$  之间的简单路径被算了两次。

对于  $c_{\{A'_u\}, k}$  除了节点  $u$  的颜色，都是两个线段树的信息直接求和。而对于节点  $u$  的颜色  $k_u$  合并后有  $c_{\{A'_u\}, \{k_u\}} = s'_u$

其中乘一个数更新答案，可以用懒惰标记来做，在合并、修改、询问时上传标记即可。

减掉的那部分答案，就需要用一下线段树合并的性质，来将公共颜色的节点之间的简单路径的贡献处理好。

特殊地，对于  $c_{\{A'_u\}, \{k_u\}} = s'_u$  的操作，由于只会进行边数乘  $\log n$  次，所以总复杂度是  $\mathcal{O}(n \log n)$

算上线段树合并的复杂度，即最初的节点数量，也即 DFS 最开始时，创建的只有一个节点信息的线段树，总节点数量为  $\mathcal{O}(n \log n)$

所以这个算法的总的时间复杂度为  $\mathcal{O}(n \log n)$

后记

很麻烦？那就对了，因为这个不是正解，正解很简洁，而且是线性的时间复杂度，快去看 Tutorial 吧。

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020.06.05-2020.06.11\\_%E5%91%A8%E6%8A%A5&rev=1591981695](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:2020.06.05-2020.06.11_%E5%91%A8%E6%8A%A5&rev=1591981695)

Last update: 2020/06/13 01:08

