

# Contest Info

date: 2020-07-18 12:00~17:00

[2020-2021 BUAA ICPC Team Supplementary Training 01](#)

[2015-2016 Petrozavodsk Winter Training Camp, Saratov SU Contest](#)

## Solutions

### A. Three Servers

题目大意

题解

### B. Game on Bipartite Graph

题目大意

题解

### C. Black and White Board

题目大意

题解

### D. Catenary

题目大意

现有  $n$  个质量均匀分布的棒子，头在  $(0, 0)$  点挂着，尾在  $(L, 0)$  点挂着，然后让整条链自然下垂，求每个点自然下垂稳定之后的位置。

题解

不会奇奇怪怪的东西，我只知道自然下垂时，必然总体的重力势能是最小的。

记长度单位为米，棒子每米的质量为  $m_0$  重力势能为  $g$

记  $\alpha_i \in [0, \pi]$  为第  $i$  个棒子和重力方向的夹角。写出来每个点的坐标，写一下重力势能，限制一下最后一个点的坐标为  $(L, 0)$  用拉格朗日乘数法，我们需要最小化  $P(\vec{\alpha}, \lambda_1, \lambda_2) = \left( \sum_{i=1}^n m_i g \left( \frac{1}{2} l_i \cos \alpha_i + \sum_{j < i} l_j \cos \alpha_j \right) \right) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n l_i \sin \alpha_i - L \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n l_i \cos \alpha_i \right)$  相当于最小化  $F(\vec{\alpha}, \lambda_1, \lambda_2) = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} l_i \cos \alpha_i + \sum_{j < i} l_j \cos \alpha_j \right) \right) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n l_i \sin \alpha_i - L \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n l_i \cos \alpha_i \right)$  偏导  $\begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} & = & \frac{1}{2} l_i^2 \sin \alpha_i + \sum_{j > i} l_j l_i \sin \alpha_i + \lambda_1 l_i \cos \alpha_i - \lambda_2 l_i \sin \alpha_i \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} & = & \sum_{i=1}^n l_i \sin \alpha_i - L \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} & = & \sum_{i=1}^n l_i \cos \alpha_i \end{array}$

目标是让偏导都为 0，但容易想到实际上偏导均为 0 应该是两个解。另外一个取最大值，那种情况下必然  $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$  所以我们限制一下  $\alpha_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

我们先令  $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0$  容易发现只要前两个角度不同，就可以直接解出  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$

考虑一下  $\alpha_i > \alpha_{i+1}$  容易发现如果我们将第  $i$  个棒子的起点和第  $i+1$  个棒子的终点用线段连起来，会发现两个棒子都在这个线段的上方，但是我们如果让两个棒子根据这个线段对称一下，就能得到重力势能最小的解。因此在最小化重力势能的情况下  $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$

假设  $\alpha_1 < \alpha_2$  即  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  有：
$$\lambda_1 = \frac{\left( -\sin \alpha_1 \left( \frac{1}{2} l_1 + \sum_{j > 1} l_j \right) \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \left( \frac{1}{2} l_2 + \sum_{j > 2} l_j \right) \cos \alpha_2 \right)}{\left( \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \right)}$$
$$\lambda_2 = \frac{\left( \cos \alpha_1 \left( \frac{1}{2} l_1 + \sum_{j > 1} l_j \right) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \left( \frac{1}{2} l_2 + \sum_{j > 2} l_j \right) \sin \alpha_2 \right)}{\left( \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \right)}$$

## E. Evacuation Plan

题目大意

题解

## F. Empty Vessels

题目大意

题解

## G. Maximum Product

题目大意

题解

## H. Biathlon 2.0

题目大意

题解

## I. Archaeological Research

题目大意

题解

## J. Sockets

题目大意

题解

## K. Toll Roads

题目大意

题解

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:ru-winter-camp-2015-saratov-su&rev=1595553035>

Last update: 2020/07/24 09:10