Contest Info

date: 2020-07-18 12:00~17:00

2020-2021 BUAA ICPC Team Supplementary Training 01

2015-2016 Petrozavodsk Winter Training Camp, Saratov SU Contest

Solutions

A. Three Servers

题目大意□

题解□

B. Game on Bipartite Graph

题目大意□

题解□

C. Black and White Board

题目大意□

题解□

D. Catenary

题目大意□

现有 n 个质量均匀分布的棒子，头在 $(0, 0)$ 点挂着，尾在 (L, 0) 点挂着，然后让整条链自然下垂，求每个点自然下垂稳定之后的位置。

题解□

不会奇奇怪怪的东西，我只知道自然下垂时，必然总体的重力势能是最小的。

记长度单位为米，棒子每米的质量为 m_0□重力势能为 g□

记 $\alpha_i \in [0, \pi]$ 为第 i 个棒子和重力方向的夹角。写出来每个点的坐标，写一下重力势能，限制一下最后一个点的坐标为 $(L, 0)$□用拉格朗日乘数法，我们需要最小化□ $$ P\left(\vec{\alpha}, \lambda'_1, \lambda'_2\right) = \left(\sum_{i=1}^n{-m_0 l_i g \left(\frac{1}{2} l_i \cos{\alpha_i} + \sum_{j<i}{l_j \cos{\alpha_j}} \right)}\right) + \lambda'_1 \left(\left(\sum_{i=1}^n{l_i \sin{\alpha_i}}\right) - L\right) + \lambda'_2 \left(\sum_{i=1}^n{l_i \cos{\alpha_i}}\right) $$ 相当于最小化□ $$ F\left(\vec{\alpha}, \lambda_1, \lambda_2\right) = \left(\sum_{i=1}^n{-l_i \left(\frac{1}{2} l_i \cos{\alpha_i} + \sum_{j<i}{l_j \cos{\alpha_j}} \right)}\right) + \lambda_1 \left(\left(\sum_{i=1}^n{l_i \sin{\alpha_i}}\right) - L\right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n{l_i \cos{\alpha_i}}\right) $$ 偏导□ $$ \begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} &=& \frac{1}{2} l_i^2 \sin{\alpha_i} + \sum_{j > i}{l_j l_i \sin{\alpha_i}} + \lambda_1 l_i \cos{\alpha_i} - \lambda_2 l_i \sin{\alpha_i} \\ &=& l_i \sin{\alpha_i} \left(\frac{1}{2} l_i + \sum_{j > i}{l_j}\right) + \lambda_1 l_i \cos{\alpha_i} - \lambda_2 l_i \sin{\alpha_i} \end{array} $$ $$ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \left(\sum_{i=1}^n{l_i \sin{\alpha_i}}\right) - L \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^n{l_i \cos{\alpha_i}} $$

目标是让偏导都为 0，但容易想到实际上偏导均为 0 应该是有两个解。另外一个是取最大值，那种情况下必然 $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$□所以我们限制一下 $\alpha_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$□

考虑一下 $\alpha_{i} > \alpha_{i+1}$□容易发现如果我们将第 i 个棒子的起点和第 $i+1$ 个棒子的终点用线段连起来，会发现两个棒子都在这个线段的上方，但是我们如果让两个棒子根据这个线段对称一下，就能得到重力势能最小的解。因此在最小化重力势能的情况下 $\alpha_{i} \le \alpha_{i+1}$□

记 x_i 为： $$ x_i = \frac{1}{2} l_i + \sum_{j > i}{l_j} $$ x_i 的差分是两个棒子长度和的一半，所以 x_i 单调递减。

我们先令 $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0$□容易发现只要前两个角度不同，就可以直接解出 λ_1 和 λ_2□

假设 $\alpha_1 < \alpha_2$ □即 $\alpha_1 \ne \alpha_2$□□有： $$ \lambda_1 = \frac{\left|\begin{array}{ccc} -x_1 \sin{\alpha_1} & -\sin{\alpha_1} \\ -x_2 \sin{\alpha_2} & -\sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|} {\left|\begin{array}{ccc} \cos{\alpha_1} & -\sin{\alpha_1} \\ \cos{\alpha_2} & -\sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|} = \frac{\sin{\alpha_1}\sin{\alpha_2} \left(x_1 - x_2\right)}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} $$ $$ \lambda_2 = \frac{\left|\begin{array}{ccc} \cos{\alpha_1} & -x_1 \sin{\alpha_1} \\ \cos{\alpha_2} & -x_2 \sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc} \cos{\alpha_1} & -\sin{\alpha_1} \\ \cos{\alpha_2} & -\sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|} = \frac{x_1 \sin{\alpha_1} \cos{\alpha_2} - x_2 \cos{\alpha_1} \sin{\alpha_2}}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} $$

利用 $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0$□可以解得 α_i 是以 $-\lambda_1$ 为对边、以 $x_i - \lambda_2$ 为临边的直角三角形中的角，可以用 atan2 来解。因为 x_i 是单调递减的，所以这样直接解出来的角度也是单调递增的。

到现在我已经分析的是头昏眼花，所以接下来的只能猜一下了。想象一下，如果 α_1 固定了，那么随着 α_2 的变化，我们通过上面的方式计算一下最后一个点的坐标，这个点划过的轨迹必然是一个连续、光滑的曲线，我们需要一个可以三分的目标函数，这个目标函数越小，就表明最终一个点越接近 $(L, 0)$□

~~最后就只能各种距离函数都试一下了 XwX□不过确实轨迹上的曲率很难确定，而且轨迹是光滑的，因此像切比雪夫距离、曼哈顿距离之类的，在确定的距离下图形不是光滑的距离函数会比较适合。最后发现三分第一个角套三分第二个角，最小化最终一个点到 $(L, 0)$ 的切比雪夫距离能获得正确的解，晚安。~~

哦天哪，我们先考虑一下解出来的 λ_2 的意义，由于 $-\lambda_1 \ge 0$□所以 λ_2 相

当于是在确定一个下标 j，使得： $$x_1 - \lambda_2 > x_2 - \lambda_2 > \cdots > x_j - \lambda_2 \ge 0 > x_{j+1} - \lambda_2 > \cdots > x_n - \lambda_2$$ 即 λ_2 确定了什么时候角度会超过 $\frac{pi}{2}$，也即纵坐标开始往反方向走的时候。

来确定一下 λ_2 和 α_2 的关系吧，有： $$ \lambda_2 = \frac{x_1 \sin{\alpha_1} \cos{\alpha_2} - x_2 \cos{\alpha_1} \sin{\alpha_2}}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} = \frac{(x_1 - x_2) \sin{\alpha_1} \cos{\alpha_2}}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} + x_2 \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} = (x_1 - x_2) \sin{\alpha_1} \frac{-\sin{\alpha_2} \sin{(\alpha_1 - \alpha_2)} - \cos{\alpha_2} \cos{(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} = -(x_1 - x_2) \sin{\alpha_1} \frac{\cos{\alpha_1}}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} \ge 0 $$ 即 λ_2 随 α_2 的增大而单调递增，即是说第二个角度越大，纵坐标越是提早往反方向走。

而由于 $-\lambda_1$ 始终大于或等于 0，因此 $\sin{\alpha_i} \ge 0$，也即横坐标是持续增长的，不会转一圈又捞回来。

那么更重要的分析是确定一下最终一个点的纵坐标是否是随 α_2 的增大而持续增大的，再分析下去我就要死了，总之 $\cos{\alpha_i}$ 是前面一些是正的，后面一些是负的，我们假装用长度加权求和后是递增的好了 XwX。

那么容易想到如果 α_1 固定了，那么随着 α_2 的增长，最终那个点的纵坐标会先从负的，连续地变化到正的，那刚好我们可以用二分来求一下纵坐标为 0 时的 α_2，此时的横坐标也会和 α_1 有一个关系，至于是不是单调地连续变化，已经没有什么好害怕的了，猜一下吧，随 α_1 的增长是单调递增的，那么这一层也是可以二分的。

最终的做法就是二分 α_1，求一下 α_2 是多少是最终的点的纵坐标为 0，二分找最终点横坐标为 L 的 α_1。对于 α_2 的求法，也是二分一下，找最终点纵坐标为 0 时的 α_2。

E. Evacuation Plan

题目大意：

题解：

F. Empty Vessels

题目大意：

题解：

G. Maximum Product

题目大意：

题解：

H. Biathlon 2.0

题目大意：

题解：

I. Archaeological Research

题目大意：

题解：

J. Sockets

题目大意：

题解：

K. Toll Roads

题目大意：

题解：