Contest Info

date: 2020-07-18 12:00~17:00

2020-2021 BUAA ICPC Team Supplementary Training 01

2015-2016 Petrozavodsk Winter Training Camp, Saratov SU Contest

Solutions

A. Three Servers

题目大意

题解

B. Game on Bipartite Graph

题目大意

题解

C. Black and White Board

题目大意

题解

D. Catenary

题目大意

现有 n 个质量均匀分布的棒子，头在 $(0, 0)$ 点挂着，尾在 (L, 0) 点挂着，然后让整条链自然下垂，求每个点自然下垂稳定之后的位置。

题解

不会奇奇怪怪的东西，我只知道自然下垂时，必然总体的重力势能是最小的。

记长度单位为米，棒子每米的质量为 m_0重力势能为 g

记 $\alpha_i \in [0, \pi]$ 为第 i 个棒子和重力方向的夹角。写出来每个点的坐标，写一下重力势能，限制一下最后一个点的坐标为 $(L, 0)$□用拉格朗日乘数法，我们需要最小化□ $$ P\left(\vec{\alpha}, \lambda'_1, \lambda'_2\right) = \left(\sum_{i=1}^n{-m_0 l_i g \left(\frac{1}{2} l_i \cos{\alpha_i} + \sum_{j<i}{l_j \cos{\alpha_j}} \right)}\right) + \lambda'_1 \left(\left(\sum_{i=1}^n{l_i \sin{\alpha_i}}\right) - L\right) + \lambda'_2 \left(\sum_{i=1}^n{l_i \cos{\alpha_i}}\right) $$ 相当于最小化□ $$ F\left(\vec{\alpha}, \lambda_1, \lambda_2\right) = \left(\sum_{i=1}^n{-l_i \left(\frac{1}{2} l_i \cos{\alpha_i} + \sum_{j<i}{l_j \cos{\alpha_j}} \right)}\right) + \lambda_1 \left(\left(\sum_{i=1}^n{l_i \sin{\alpha_i}}\right) - L\right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n{l_i \cos{\alpha_i}}\right) $$ 偏导□ $$ \begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} &=& \frac{1}{2} l_i^2 \sin{\alpha_i} + \sum_{j > i}{l_j l_i \sin{\alpha_i}} + \lambda_1 l_i \cos{\alpha_i} - \lambda_2 l_i \sin{\alpha_i} \\ &=& l_i \sin{\alpha_i} \left(\frac{1}{2} l_i + \sum_{j > i}{l_j}\right) + \lambda_1 l_i \cos{\alpha_i} - \lambda_2 l_i \sin{\alpha_i} \end{array} $$ $$ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \left(\sum_{i=1}^n{l_i \sin{\alpha_i}}\right) - L \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^n{l_i \cos{\alpha_i}} $$

目标是让偏导都为 0，但容易想到实际上偏导均为 0 应该是有两个解。另外一个是取最大值，那种情况下必然 $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$□所以我们限制一下 $\alpha_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$□

考虑一下 $\alpha_{i} > \alpha_{i+1}$□容易发现如果我们将第 i 个棒子的起点和第 $i+1$ 个棒子的终点用线段连起来，会发现两个棒子都在这个线段的上方，但是我们如果让两个棒子根据这个线段对称一下，就能得到重力势能最小的解。因此在最小化重力势能的情况下 $\alpha_{i} \le \alpha_{i+1}$□

记 x_i 为： $$ x_i = \frac{1}{2} l_i + \sum_{j > i}{l_j} $$ x_i 的差分是两个棒子长度和的一半，所以 x_i 单调递减。

我们先令 $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0$□容易发现只要前两个角度不同，就可以直接解出 λ_1 和 λ_2□

假设 $\alpha_1 < \alpha_2$ □即 $\alpha_1 \ne \alpha_2$□□有： $$ \lambda_1 = \frac{\left|\begin{array}{ccc} -x_1 \sin{\alpha_1} & -\sin{\alpha_1} \\ -x_2 \sin{\alpha_2} & -\sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|} {\left|\begin{array}{ccc} \cos{\alpha_1} & -\sin{\alpha_1} \\ \cos{\alpha_2} & -\sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|} = \frac{\sin{\alpha_1}\sin{\alpha_2} \left(x_1 - x_2\right)}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} $$ $$ \lambda_2 = \frac{\left|\begin{array}{ccc} \cos{\alpha_1} & -x_1 \sin{\alpha_1} \\ \cos{\alpha_2} & -x_2 \sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|} {\left|\begin{array}{ccc} \cos{\alpha_1} & -\sin{\alpha_1} \\ \cos{\alpha_2} & -\sin{\alpha_2} \\ \end{array}\right|} = \frac{x_1 \sin{\alpha_1} \cos{\alpha_2} - x_2 \cos{\alpha_1} \sin{\alpha_2}}{\sin{(\alpha_1 - \alpha_2)}} $$

利用 $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0$□可以解得 α_i 是以 $-\lambda_1$ 为对边、以 $x_i - \lambda_2$ 为临边的直角三角形中的角，可以用 atan2 来解。因为 x_i 是单调递减的，所以这样直接解出来的角度也是单调递增的。

到现在我已经分析的是头昏眼花，所以接下来的只能猜一下了。想象一下，如果 α_1 固定了，那么随着 α_2 的变化，我们通过上面的方式计算一下最后一个点的坐标，这个点划过的轨迹必然是一个连续、光滑的曲线，我们需要一个可以三分的目标函数，这个目标函数越小，就表明最终一个点越接近 $(L, 0)$□

最后就只能各种距离函数都试一下了 XwX□不过确实轨迹上的曲率很难确定，而且轨迹是光滑的，因此像切比雪夫距离、曼哈顿距离之类的，在确定的距离下图形不是光滑的距离函数会比较适合。

最后发现三分第一个角套三分第二个角，最小化最终一个点到 $(L, 0)$ 的切比雪夫距离能获得正确的解，晚安。

E. Evacuation Plan

题目大意：

题解：

F. Empty Vessels

题目大意：

题解：

G. Maximum Product

题目大意：

题解：

H. Biathlon 2.0

题目大意：

题解：

I. Archaeological Research

题目大意：

题解：

J. Sockets

题目大意：

题解：

K. Toll Roads

题目大意：

题解