

Contest Info

date: 2021.07.08 ??:??-?:??

[practice link](#)

Solutions

B. Lockout vs tourist

题目大意：一场比赛有 n 道题，每题有一定的分值。你和 tourist 两个人参加，每题只有先通过的人能得分。每次你和 tourist 分别选一道题做，如果你们做了同一道题，tourist 会比你先做完，你什么都得不到，然后继续抢剩下的题。如果你们选择了不同的题，你可以得到你选的那道题的分，但是之后 tourist 会开启暴走模式，秒掉剩下所有的题。问最优情况下你能得多少分。

题解：这是一个二人有限零和博弈。考虑状压 dp ，显然当两个选择同一个问题时，收益是一个子问题，否则是你做的题的得分。考虑最小最大值定理，游戏的价值

$$\begin{aligned} V &= \min_q \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \\ &\quad \&= \min_q \max_{i=1}^n q_i b_i + (1 - q_i) a_i \\ &\quad \&= \min_q \max_{i=1}^n a_i + (b_i - a_i) q_i \end{aligned}$$

单纯形的时间复杂度肯定是不过关的。考虑这样的判定问题：
 $\forall q, \max_{i=1}^n a_i + (b_i - a_i) q_i \geq C$
即 $\forall q, \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } a_i + (b_i - a_i) q_i \geq C$
满足这样的判定问题的最大的 C 即为答案。对于每个 i 有

$$\begin{cases} q_i \leq \frac{C - a_i}{b_i - a_i} & (b_i < a_i) \\ q_i \geq \frac{C - a_i}{b_i - a_i} & (b_i > a_i) \end{cases}$$

那么什么样的 C 满足要求呢？对第二种情况，只要有一个 $a_i \geq C$ 就满足要求。对于所有第三种情况，若所有右边都 > 0 ，那么对于所有 q 都 $= 0$ 的情况就不一定有解。而只要有一个 ≤ 0 即小于等于 $\max a_i$ 那么显然有解，形式上和第二种情况一样。对第一种情况，显然要求右侧所有值 **和 0 取 $\max$** （这里很坑）的和加起来大于等于 1 ，求解时需要对 a_i 排序扫描线。综合这几种情况的 C 的最大值，即为答案。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:xxi-open-cup-grand-prix-of-nizhny-novgorod>

Last update: 2021/08/26 12:53