

BM 学习笔记

设域 F 上有一无限数列 s_0, s_1, \dots 我们想要对某个有限的 n 找到一个尽可能短的数列 c_1, \dots, c_L 使得 $s_j = -\sum_{i=1}^L c_i s_{j-i}$ 对 $j=L, L+1, \dots, n-1$ 成立。特别地，若 $L=0$ 意味着 $s_0 = s_1 = \dots = s_{n-1} = 0$ 记 s_0, \dots, s_{n-1} 为 $s^{(n)}$ 这样的数列 c 称为 $s^{(n)}$ 的递推式。由定义可以看出，任意 $L \geq n$ 的数列 c 都是 $s^{(n)}$ 的递推式。我们定义长度最小的递推式为最小递推式。下面证明一个重要的引理：

引理 1

设长度为 L 的数列 c 是 $s^{(n)}$ 的递推式，而不是 $s^{(n+1)}$ 的递推式；长度为 L' 的数列 c' 是 $s^{(n+1)}$ 的递推式，那么 $L' \geq n+1-L$

证明：采用反证法，假设 $L' \leq n-L$ 那么有
$$s_n = -\sum_{i=1}^{L'} c'_i s_{n-i} = -\sum_{i=1}^{L'} c'_i \left(-\sum_{j=1}^L c_j s_{n-i-j} \right)$$
 注意这里如果 $L' > n-L$ 则不能展开成括号内的形式
$$s_n = -\sum_{j=1}^{L'} c'_j \left(-\sum_{i=1}^L c_i s_{n-i-j} \right) = -\sum_{j=1}^{L'} c'_j s_{n-j}$$
 这与 c 不是 $s^{(n+1)}$ 的递推式矛盾 \square

我们定义 $L^{(n)}(s)$ 表示 $s^{(n)}$ 最小递推式的长度。显然有 $L^{(n)}(s) \leq L^{(n+1)}(s)$ 假如 $L^{(n)}(s)$ 对应的 c 不是 $s^{(n+1)}$ 的递推式，那么就有

$L^{(n+1)}(s) \geq \max\{L^{(n)}(s), n+1-L^{(n)}(s)\}$ 我们定义多项式

$C(x) = 1 + \sum_{i=1}^L c_i x^i$ 并记 $L^{(n)}(s)$ 对应的 c 为 $c^{(n)}$ 它对应的多项式为 $C^{(n)}(x)$

为了便于叙述下面的定理，我们先讲一个性质：如果不同的 $c^{(n)}$ 中，既有是 $s^{(n+1)}$ 的递推式的，也有不是 $s^{(n+1)}$ 的递推式的，那么显然有 $L^{(n)}(s) \geq n+1-L^{(n)}(s)$

定理 1

对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 若 $c^{(n)}$ 中有是 $s^{(n+1)}$ 的递推式的，那么 $L^{(n+1)}(s) = L^{(n)}(s)$ 若 $c^{(n)}$ 中有不是 $s^{(n+1)}$ 的递推式的，那么 $L^{(n+1)}(s) = \max\{L^{(n)}(s), n+1-L^{(n)}(s)\}$ 根据上面的性质，如果二者都有，命题也不矛盾。

证明：我们用归纳法证明该性质。记 $d_n = s_n + \sum_{i=1}^{L^{(n)}(s)} c^{(n)}_i s_{n-i}$

第一个部分，即存在一个 $d_n = 0$ 我们只要让 $c^{(n+1)} = c^{(n)}$ 即可。

第二个部分，即存在一个 $d_n \neq 0$ 若 $L^{(n)}(s) = 0$ 那么也显然成立。

否则，必然存在一个 m 使得 $L^{(m)}(s) < L^{(m+1)}(s) = \dots = L^{(n)}(s)$ 因为 $L^{(0)}(s) = 0$ 根据归纳假设，此时必然有 $L^{(n)}(s) = L^{(m+1)}(s) = m+1-L^{(m)}(s)$

定义多项式 $C^{(n+1)}(x) = C^{(n)}(x) - d_m^{-1} d_n x^{n-m} C^{(m)}(x)$ 计算可知 $C^{(n+1)}(x)$ 的次数就是 $\max\{L^{(n)}(s), n+1-L^{(n)}(s)\}$ 且常数项为 1 。下面我们来验证 $c^{(n+1)}$ 是 $s^{(n+1)}$ 的递推式。

记 $L = \max\{L^{(n)}(s), n+1-L^{(n)}(s)\}$ 对于 $i=L, L+1, \dots, n-1$
$$s_i + \sum_{j=1}^L c^{(n+1)}_j s_{i-j}$$

$$=s_i + \sum_{j=1}^{L^{(n)}(s)} c^{(n)}_j s_{i-j} - d^{-1}_m d_n \left(s_{i-(n-m)} - \sum_{j=1}^{L^{(m)}(s)} c^{(m)}_j s_{i-(n-m)-j} \right) = 0$$
 对于 $i=n$

$$=s_n + \sum_{i=1}^{L^{(n)}(s)} c^{(n)}_i s_{n-i} - d^{-1}_m d_n \left(s_m - \sum_{i=1}^{L^{(m)}(s)} c^{(m)}_i s_{m-i} \right) = d_n - d_m^{-1} d_n d_m = 0$$
 下面介绍两个实现时的数值分析：

性质 1

若 $s_n = XA^n Y$ 其中 $X \in F^{1 \times k}$, $A \in F^{k \times k}$, $Y \in F^{k \times 1}$ 那么对 $\forall n \in \mathbb{N}, L^{(n)}(s) \leq k$

证明：设 $p(x)$ 是 A 的特征多项式（若 k 次项为 -1 ，需要取反），根据 [Cayley-Hamilton theorem](#) $p(A) = 0$ 设 $c_i = p_{k-i}, i=1, \dots, k$ 对 $\forall i \geq k$

$$s_i + \sum_{j=1}^k c_j s_{i-j} = XA^i Y + \sum_{j=1}^k p_{k-j} XA^{i-j} Y = X(A^i + \sum_{j=1}^k p_{k-j} A^{i-j}) Y = 0$$

性质 2

设有无限数列 s 及长度为 L 的数列 c 满足 $\forall i \geq L, c$ 是 $s^{(i)}$ 的递推式。若存在长度为 $L' \leq L$ 的数列 c' 满足 c' 是 $s^{(2L)}$ 的递推式，那么对于 $\forall i \geq L', c'$ 是 $s^{(i)}$ 的递推式。

证明：假设存在 $i \geq 2L$ 使得 c' 是 $s^{(i)}$ 的递推式，而不是 $s^{(i+1)}$ 的递推式，那么 $L+L' \geq i+1 \geq 2L+1$ 矛盾。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:bm&rev=1590378887>

Last update: 2020/05/25 11:54