

H. Multithreading

题目大意：一个圆上有 $2n$ 颗珠子，每颗珠子为黑色或白色，且每种颜色的数量均为偶数。将所有同色的珠子两两匹配，所得的线段会产生一些交点，仅考虑其中白线和黑线相交的交点。定义 f 所有匹配中异色交点的最小值。现在给出一个长度为 $2n$ 的串 s 由 bw 组成，其中 w 可以选填 b 或 w 。求所有合法方案 f 的期望。另外，还会对 s 有 m 次修改，每次修改一个字符。

题解：虽然说也观察到了性质，但是还是题解的好用啊。

我的性质：可以证明会尽量连接两个相邻的同色珠子 f 等于将所有相邻同色珠子不断删去后剩余珠子数量的 $\frac{1}{4}$

题解的性质：记 b_e, b_o 分别表示在偶数和奇数位置的黑色珠子数量 $f = \frac{1}{2} |b_e - b_o|$

容易看出两个性质等价。

设 p_e, p_o 分别表示在偶数和奇数位置的 w 个数 $p = p_e + p_o$ 那么答案为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^p} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [i + b_e - b_o \equiv 0 \pmod{2}] &= \frac{1}{2^p} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \binom{p_e}{t} \binom{p_o}{t-i} \\ &= \frac{1}{2^p} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [i + b_e - b_o \equiv 0 \pmod{2}] \binom{p}{i} \\ &= \frac{1}{2^p} \sum_{i=0}^p [i+c \equiv 0 \pmod{2}] \binom{p}{i} \end{aligned}$$

其中 $c = b_e - b_o - p_o$ 不考虑 $\frac{1}{2^p}$ 且省略同余条件。

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^p (-1)^{-i-c} \binom{p}{i} + \sum_{i=-c+1}^p (-1)^{i+c} \binom{p}{i} \\ &= (-1)^{-c} \binom{p}{p-1} + (-1)^{p-c} \binom{p}{p-1} \\ &= (-1)^{-c} \binom{p}{p-1} + (-1)^{p-c} \binom{p}{p-1} \end{aligned}$$

注意这里 i 和 j 的奇偶性条件是不一样的。

这个时候，我们只需要维护 $S(n, m, k) = \sum_{i=0}^m [i \equiv k \pmod{2}] \binom{n}{i}$ 注意到每次修改只会导致 n, m 产生 $O(1)$ 的变化，使用我们熟悉的递推即可求得。

update：事实上

$$S(n, m, k) = \sum_{i=0}^m [i \equiv k \pmod{2}] \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^m [i \not\equiv k \pmod{2}] \binom{n-1}{i}$$

这样就不需要讨论奇偶，方便多了。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:codeforces_global_round_12

Last update: 2021/03/14 20:21