

H. Multithreading

题目大意：一个圆上有 $2n$ 颗珠子，每颗珠子为黑色或白色，且每种颜色的数量均为偶数。将所有同色的珠子两两匹配，所得的线段会产生一些交点，仅考虑其中白线和黑线相交的交点。定义 $f(s)$ 为所有匹配中异色交点的最小值。现在给出一个长度为 $2n$ 的串 s ，由 $bw?$ 组成，其中 $?$ 可以选填 b 或 w 。求所有合法方案 $f(s)$ 的期望。另外，还会对 s 有 m 次修改，每次修改一个字符。

题解：虽然说也观察到了性质，但是还是题解的好用啊。

我的性质：可以证明会尽量连接两个相邻的同色珠子 $\$f\$$ 等于将所有相邻同色珠子不断删去后剩余珠子数量的 $\frac{1}{4}$

题解的性质：记 b_e , b_o 分别表示在偶数和奇数位置的黑色珠子数量，则 $b_e = b_o + 1$

容易看出两个性质等价。

设 p_e , p_o 分别表示在偶数和奇数位置的个数, 那么答案为

```

$$ \begin{aligned} & \frac{1}{2^p} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [i+b_e - b_o] \equiv 0 \pmod{2} \\ & |i+b_e - b_o| \sum_{t=-\infty}^{+\infty} {p_e \choose t} {p_o \choose t-i} \\ & = \frac{1}{2^p} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [i+b_e - b_o] \equiv 0 \pmod{2} \\ & |i+b_e - b_o| {p \choose p_o + i} \\ & = \frac{1}{2^p} \sum_{i=0}^p [i+c] \equiv 0 \pmod{2} \\ & |i+c| {p \choose i} \end{aligned} $$

```

其中 $c = b_e - b_o - p_o$ 不考虑 $\frac{1}{2^p}$ 且省略同余条件。

```
$$ \begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{-c} (-i-c) p \binom{i}{p} + \sum_{i=-c+1}^p p(i+c) p \binom{i}{p} \\ &= - \sum_{i=0}^{-c} p(p-1) \binom{i-1}{p-1} + c p \binom{p}{p} + \sum_{i=-c+1}^p p p(p-1) \binom{i-1}{p-1} + c p \binom{p}{p} \\ &= - \sum_{i=0}^{-c} p(p-1) \binom{i-1}{p-1} + c p \binom{p}{p} + \sum_{j=0}^{p+c-1} p(p-1) \binom{j}{p-1} + c p \binom{p}{p} \end{aligned} $$
```

注意这里 `i` 和 `j` 的奇偶性条件是不一样的。

这个时候，我们只需要维护 $S(n,m,k) = \sum_{i=0}^m [i \equiv k \pmod{2}] \binom{n}{i}$ 注意到每次修改只会导致 n, m 产生 $O(1)$ 的变化，使用我们熟悉的递推即可求得。

update : 事实上

```
$$ \begin{aligned} & S(n,m,k) \\ &= \sum_{i=0}^m [i \equiv k \pmod{2}] \binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{m-[m \not\equiv k \pmod{2}]} \binom{n-1}{i} \end{aligned} $$
```

这样就不需要讨论奇偶，方便多了。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidsword:zhongzihao:codeforces_global_round_12

Last update: 2021/03/14 20:21

