

Contest Info

[practice link](#)

Solutions

F. Rainbow Balls

题目大意：一个袋子里有一些球，有 n 种颜色，第 i 种有 a_i 个。每回合从中**依次**摸出两个球，然后将第二个球的颜色变为第一个球的颜色，然后再放回。直到所有球的颜色相同为止。求回合数的期望。

题解：对每种颜色分别计算，那么除了当前的颜色，其他颜色是什么都没关系。

设球的总数是 S ， E_x 表示当前有 x 个球时的“期望”。这里的期望事实上要排除掉最终使得球数为 0 的情况，这种情况不应该在这里计算。推一下这种“期望”的线性性可以知道，一回合的代价不应该是 1 ，而应该是使得球数为 S 的概率，设为 p_x

那么有

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_S &= 1 \\ p_x &= \frac{1}{2}(p_{x+1} + p_{x-1}) \end{aligned}$$

由此可知 $p_x = xp_1$ 从而 $p_1 = \frac{1}{S}$

那么对于一般的 x 有

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{x(S-x)}{S(S-1)}(E_{x+1} + E_{x-1}) + (1 - \frac{x(S-x)}{S(S-1)})E_x + \frac{x}{S} \cdot 2E_x \\ &= E_{x+1} + E_{x-1} + \frac{(S-1)}{(S-x)} E_{x+1} - E_x \\ &= E_x - E_{x-1} - \frac{(S-1)}{S-x} \end{aligned}$$

如果我们从 $E_0 = 0$ 开始递推，可以得到

$$E_x - E_{x-1} = E_1 - \sum_{i=1}^{x-1} \frac{(S-1)}{S-i}$$

$$E_x = xE_1 - \sum_{i=1}^{x-1} \frac{(S-1)(x-i)}{S-i}$$

而且 $E_S = 0$ 因此

$$\begin{aligned} 0 &= SE_1 - \sum_{i=1}^{S-1} (S-1) E_1 \\ &= \frac{(S-1)^2}{S} \end{aligned}$$

从而

$$E_x = \frac{(S-1)^2 x}{S} - \sum_{i=1}^{x-1} \frac{(S-1)(x-i)}{S-i}$$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:codeforces_round_432_div_1 

Last update: **2020/05/17 21:38**