Contest Info

practice link

Solutions

A

B

E. Chiori and Doll Picking

题目大意：给你 n 个 m 位整数，对于 $\forall i,0\le i\le m$□统计 2^{n} 个子集的异或和中 `bitcnt` 为 i 的数量。

题解：考虑这 n 个整数的一组基 A□定义 $S(A)$ 表示 A 的所有子集异或和组成的集合□$\forall s\in S(A)$□以及 A 以外的任意子集□A 中可以恰选出一个子集使得异或和为 s□因此只需考虑 A 中每个子集的答案，乘上 $2^{n-|A|}$ 即可。

设 $|A|=k$□若 $k\le\frac{m}{2}$□可以直接 2^{k} 枚举答案。

否则，可以注意到 A 中大部分位置是主元，即只有一个地方有，那么记录一下主元的数量以及非主元的状态，可得一个 $\mathcal{O}(k^{2}2^{m-k})$ 的 dp□

考虑进一步优化，将 A 变换到维数较小的空间中，即可暴力计算答案再转换回来。

将 A 看做一个 2^{m} 维向量□$A_{i}=1\text{ iff }i\in S(A)$□对于 $\forall i,0\le i\le m$□定义 P_{i} 为一个 2^{m} 维向量□$P_{ij}=1\text{ iff }\text{bitcnt}(j)=i$□那么 ans_{i} 即为 A 和 P_{i} 的异或卷积的第 0 项（我真的不知道要怎么想到）。考虑 Walsh-Hadamard 变换，记变换为 f□答案是 $f(A)$ 和 $f(P_{i})$ 的内积除以 2^{m}□接下来需要研究 $f(A)$ 的性质。

由于线性基的性质，有 $A*A=A*2^{k}$□即 $f(A)*f(A)=f(A)*2^{k}$□解方程可得 $f(A)$ 的每一位必然是 0 或 2^{k}□

$f(A)_{i}=2^{k}\text{ iff }\forall s\in S(A),2\mid\text{bitcnt}(i\land s)$□这比较显然，考虑 f 的过程，每个 s 位置会给 i 位置贡献 1 或 -1，而只有全部贡献 1 才能得到 2^{k}□若 $2\mid\text{bitcnt}(i\land s)$□$2\mid\text{bitcnt}(j\land s)$□可得 $2\mid\text{bitcnt}((i\oplus j)\land s)$□因此所有这样的 i 组成了一个线性空间，称为 $S(B)$□同时注意到，只需对 A 中的 s 满足要求即可。

$\dim S(B)=m-k$□考虑 A^{2}_{0}□从组合意义上来说，它等于选取 A 中两组基，异或和相等的方案数，为 2^{k}□从 $f^{-1}(f^{2}(A))$ 的意义上来说，它等于 $\frac{2^{2k+|B|}}{2^{m}}$□因此 $|B|=2^{m-k}$□

由以上可以推出$S(A)\oplus S(B)=F_{2}^{m}$由定义知 A 与 B 正交）。那么不妨在消元时，使得 B 的主元都是 A 的非主元。

这时，可以发现 A,B 有很奇妙的性质。对于 B 的第 j 个主元，如果 $A_{ij}=1$那么 $B{ji}$ 必须等于 1。也就是将 A,B 拼起来是个对称方阵。这样可以很容易地求出 B知道 B 后，就可以线性地求出 $S(B)$

再考虑 $f(P_{i})$由于 P_{ij} 只与 $\text{bitcnt}(j)$ 有关，考虑 f 的过程$f(P_{i})_{j}$ 也只与 $\text{bitcnt}(j)$ 有关。这里组合数随便算一下即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(2^{m-k}+m^{3})$