

# A

占坑

## E. Chiori and Doll Picking

题目大意：给你  $n$  个  $m$  位整数，对于  $\forall i, 0 \leq i \leq m$  统计  $2^n$  个子集的异或和为  $i$  的数量。

题解：考虑这  $n$  个整数的一组基  $A$  定义  $S(A)$  表示  $A$  的所有子集异或和组成的集合  $\forall s \in S(A)$  以及  $A$  以外的任意子集  $P$  中  $A$  中可以恰选出一个子集使得异或和为  $s$  因此只需考虑  $A$  中每个子集的答案，乘上  $2^{n-|A|}$  即可。

设  $|A|=k$  若  $k \leq \frac{m}{2}$  可以直接  $2^k$  枚举答案。

否则，可以注意到  $A$  中大部分位置是主元，即只有一个地方有，那么记录一下主元的数量以及非主元的状态，可得一个  $\mathcal{O}(k^2 2^{m-k})$  的 dp

考虑进一步优化，将  $A$  变换到维数较小的空间中，即可暴力计算答案再转换回来。

将  $A$  看做一个  $2^m$  维向量  $A_i = 1 \iff i \in S(A)$  对于  $\forall i, 0 \leq i \leq m$  定义  $P_i$  为一个  $2^m$  维向量  $P_{ij} = 1 \iff \text{bitcnt}(j) = i$  那么  $\text{ans}_i$  即为  $A$  和  $P_i$  的异或卷积的第  $i$  项（我真的不知道要怎么想到）。考虑 Walsh-Hadamard 变换，记变换为  $f$  答案是  $f(A)$  和  $f(P_i)$  的内积除以  $2^m$  接下来需要研究  $f(A)$  的性质。

由于线性基的性质，有  $A * A = A * 2^k$  即  $f(A) * f(A) = f(A) * 2^k$  解方程可得  $f(A)$  的每一位必然是  $0$  或  $2^k$

$f(A)_i = 2^k \iff \forall s \in S(A), 2 \mid \text{bitcnt}(i \oplus s)$  这比较显然，考虑  $f$  的过程，每个  $s$  位置会给  $i$  位置贡献  $1$  或  $-1$ ，而只有全部贡献  $1$  才能得到  $2^k$  若  $2 \mid \text{bitcnt}(i \oplus s) \iff 2 \mid \text{bitcnt}(j \oplus s) \iff 2 \mid \text{bitcnt}((i \oplus j) \oplus s)$  因此所有这样的  $i$  组成了一个线性空间，称为  $S(B)$  同时注意到，只需对  $A$  中的  $s$  满足要求即可。

$\dim S(B) = m - k$  考虑  $A^{\{2\}}_0$  从组合意义上来说，它等于选取  $A$  中两组基，异或和相等的方案数，为  $2^k$  从  $f^{-1}(f^{\{2\}}(A))$  的意义上来说，它等于  $\frac{2^{2k+|B|}}{2^m}$  因此  $|B| = 2^{m-k}$

由以上可以推出  $S(A) \oplus S(B) = F_2^m$  由定义知  $A$  与  $B$  正交。那么不妨在消元时，使得  $B$  的主元都是  $A$  的非主元。

这时，可以发现  $A, B$  有很奇妙的性质。对于  $B$  的第  $j$  个主元，如果  $A_{ij} = 1$  那么  $B_{ji}$  必须等于  $1$ 。也就是将  $A, B$  拼起来是个对称方阵。这样可以很容易地求出  $B$  知道  $B$  后，就可以线性地求出  $S(B)$

再考虑  $f(P_i)$  由于  $P_{ij}$  只与  $\text{bitcnt}(j)$  有关，考虑  $f$  的过程  $f(P_i)_j$  也只与  $\text{bitcnt}(j)$  有关。这里组合数随便算一下即可。

时间复杂度  $\mathcal{O}(2^{m-k} + m^3)$

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:codeforces\\_round\\_635\\_div\\_1&rev=1588959993](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:codeforces_round_635_div_1&rev=1588959993) 

Last update: **2020/05/09 01:46**