

A**B**

E. Chiori and Doll Picking

题目大意：给你 n 个 m 位整数，对于 $\forall i, 0 \leq i \leq m$ 统计 2^n 个子集的异或和为 i 的数量。

题解：考虑这 n 个整数的一组基 A 定义 $S(A)$ 表示 A 的所有子集异或和组成的集合 $\forall s \in S(A)$ 以及 A 以外的任意子集 A' 中可以恰选出一个子集使得异或和为 s 因此只需考虑 A 中每个子集的答案，乘以 $2^{n-|A|}$ 即可。

设 $|A|=k$ 若 $k \leq \frac{m}{2}$ 可以直接 2^k 枚举答案。

否则，可以注意到 A 中大部分位置是主元，即只有一个地方有，那么记录一下主元的数量以及非主元的状态，可得一个 $\mathcal{O}(k^2 2^{m-k})$ 的 dp

考虑进一步优化，将 A 变换到维数较小的空间中，即可暴力计算答案再转换回来。

将 A 看做一个 2^m 维向量 $A_i = 1 \iff i \in S(A)$ 对于 $\forall i, 0 \leq i \leq m$ 定义 P_i 为一个 2^m 维向量 $P_{ij} = 1 \iff \text{bitcnt}(j) = i$ 那么 ans_i 即为 A 和 P_i 的异或卷积的第 i 项（我真的不知道要怎么想到）。考虑 Walsh-Hadamard 变换，记变换为 f 答案是 $f(A)$ 和 $f(P_i)$ 的内积除以 2^m 接下来需要研究 $f(A)$ 的性质。

由于线性基的性质，有 $A * A = A * 2^k$ 即 $f(A) * f(A) = f(A) * 2^k$ 解方程可得 $f(A)$ 的每一位必然是 0 或 2^k

$f(A)_i = 2^k \iff \forall s \in S(A), 2 \mid \text{bitcnt}(i \oplus s)$ 这比较显然，考虑 f 的过程，每个 s 位置会给 i 位置贡献 1 或 -1 ，而只有全部贡献 1 才能得到 2^k 若 $2 \mid \text{bitcnt}(i \oplus s)$ $2 \mid \text{bitcnt}(j \oplus s)$ 可得 $2 \mid \text{bitcnt}((i \oplus j) \oplus s)$ 因此所有这样的 i 组成了一个线性空间，称为 $S(B)$ 同时注意到，只需对 A 中的 s 满足要求即可。

$\dim S(B) = m - k$ 考虑 $A^{\{2\}}_0$ 从组合意义上来说，它等于选取 A 中两组基，异或和相等的方案数，为 2^k 从 $f^{-1}(f^{\{2\}}(A))$ 的意义上来说，它等于 $\frac{2^{2k+|B|}}{2^m}$ 因此 $|B| = 2^{m-k}$

由以上可以推出 $S(A) \oplus S(B) = F_2^m$ 由定义知 A 与 B 正交。那么不妨在消元时，使得 B 的主元都是 A 的非主元。

这时，可以发现 A, B 有很奇妙的性质。对于 B 的第 j 个主元，如果 $A_{ij} = 1$ 那么 B_{ji} 必须等于 1 。也就是将 A, B 拼起来是个对称方阵。这样可以很容易地求出 B 知道 B 后，就可以线性地求出 $S(B)$

再考虑 $f(P_i)$ 由于 P_{ij} 只与 $\text{bitcnt}(j)$ 有关，考虑 f 的过程 $f(P_i)_j$ 也只与 $\text{bitcnt}(j)$ 有关。这里组合数随便算一下即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(2^{m-k} + m^3)$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:codeforces_round_635_div_1&rev=1588960184 

Last update: **2020/05/09 01:49**