2025/11/29 22:23 1/2 Contest Info

Α

B

E. Chiori and Doll Picking

题目大意:给你 \$n\$ 个 \$m\$ 位整数,对于 \$\forall i,0\le i\le m\$□统计 \$2^{n}\$ 个子集的异或和中bitcnt为 \$i\$ 的数量。

题解:考虑这 \$n\$ 个整数的一组基 \$A\$||定义 \$S(A)\$ 表示 \$A\$ 的所有子集异或和组成的集合||\$\\ in S(A)\$||以及 \$A\$ 以外的任意子集||\$A\$ 中可以恰选出一个子集使得异或和为 \$s\$||因此只需考虑 \$A\$ 中每个子集的答案,乘上 $$2^{n-|A|}$$ 即可。

设 \$|A|=k\$□若 \$k\le\frac{m}{2}\$□可以直接 \$2^{k}\$ 枚举答案。

否则,可以注意到 \$A\$ 中大部分位置是主元,即只有一个地方有,那么记录一下主元的数量以及非主元的 状态,可得一个 $$\mathbb{Q}(k^{2}2^{m-k})$$ 的 dp

考虑进一步优化,将 \$A\$ 变换到维数较小的空间中,即可暴力计算答案再转换回来。

将 \$A\$ 看做一个 \$2^{m}\$ 维向量□\$A_{i}=1\text{ iff }i\in S(A)\$□对于 \$\forall i,0\le i\le m\$□定义 \$P_{i}\$ 为一个 \$2^{m}\$ 维向量□\$P_{ij}=1\text{ iff }\text{bitcnt}(j)=i\$□那么 \$\text{ans}_{i}\$ 即为 \$A\$ 和 \$P_{i}\$ 的异或卷积的第 \$0\$ 项(我真的不知道要怎么想到)。考虑 Walsh-Hadamard 变换,记变换为 \$f\$□答案是 \$f(A)\$ 和 \$f(P_{i})\$ 的内积除以 \$2^{m}\$□接下来需要研究 \$f(A)\$ 的性质。

由于线性基的性质,有 \$A*A=A*2^{k}\$□即 \$f(A)*f(A)=f(A)*2^{k}\$□解方程可得 \$f(A)\$ 的每一位必然是 \$0\$ 或 \$2^{k}\$□

\$f(A)_{i}=2^{k}\text{ iff }\forall s\in S(A),2\mid\text{bitcnt}(i\land s)\$□这比较显然,考虑 \$f\$ 的过程,每个 \$s\$ 位置会给 \$i\$ 位置贡献 \$1\$ 或 \$-1\$,而只有全部贡献 \$1\$ 才能得到 \$2^{k}\$□若 \$2\mid\text{bitcnt}(i\land s)\$□\$2\mid\text{bitcnt}(i\land s)\$□可得 \$2\mid\text{bitcnt}((i\oplus j)\land s)\$□因此所有这样的 \$i\$ 组成了一个线性空间,称为 \$S(B)\$□同时注意到,只需对 \$A\$ 中的 \$s\$ 满足要求即可。

\$\dim S(B)=m-k\$□考虑 \$A^{2}_{0}\$□从组合意义上来说,它等于选取 \$A\$ 中两组基,异或和相等的方案数,为 \$2^{k}\$□从 \$f^{-1}(f^{2}(A))\$ 的意义上来说,它等于 \$\frac{2^{2k+|B|}}{2^{m}}\$□因此 \$|B|=2^{m-k}\$□

由以上可以推出□\$S(A)\oplus S(B)=F_{2}^{m}\$□由定义知 \$A\$ 与 \$B\$ 正交)。那么不妨在消元时,使得 \$B\$ 的主元都是 \$A\$ 的非主元。

这时,可以发现 \$A,B\$ 有很奇妙的性质。对于 \$B\$ 的第 \$j\$ 个主元,如果 \$A_{ij}=1\$□那么 \$B{ji}\$ 必须等于 \$1\$。也就是将 \$A,B\$ 拼起来是个对称方阵。这样可以很容易地求出 \$B\$□知道 \$B\$ 后,就可以线性地求出 \$S(B)\$□

再考虑 \$f(P_{i})\$□由于 \$P_{ij}\$ 只与 \$\text{bitcnt}(j)\$ 有关,考虑 \$f\$ 的过程□\$f(P_{i})_{j}\$ 也只与 \$\text{bitcnt}(j)\$ 有关。这里组合数随便算一下即可。

时间复杂度 \$\mathcal{0}(2^{m-k}+m^{3})\$□

Last update: 2020/05/09 2020-2021:teams:intrepidsword:zhongzihao:codeforces_round_635_div_1https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidsword:zhongzihao:codeforces_round_635_div_1&rev=1588960184 01:49

From: https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidsword:zhongzihao:codeforces_round_635_div._1&rev=1588960184

Last update: 2020/05/09 01:49



https://wiki.cvbbacm.com/ Printed on 2025/11/29 22:23