部分链接尚未搬运~

博弈论

威佐夫游戏

有两堆石子，两人轮流取，每次可以从一堆中取若干颗石子，也可以从两堆中取一样多的石子。负态为 $\{\lfloor k\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\rfloor, k+\lfloor k\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\rfloor\}(k = 0,1,2,\cdots)$

翻硬币游戏

翻硬币游戏是指这样的一种组合游戏：有 n 枚硬币排成一排，开始时它们有的正面朝上，有的反面朝上，两名玩家轮流按照一定的规则，翻转一些硬币，最后不能操作者输。这里的规则必须满足以下两点：

- 最右边的硬币必须是从正面翻转到反面（为了保证游戏结束）
- 规则允许的翻转位置集合唯一取决于最右侧硬币的位置，而与之前的操作、玩家等无关（为保证这是一个平等博弈）

翻硬币游戏有这样一个结论：一个局面的 sg 值等于所有正面硬币的 sg 值的异或，以 H 表示正，T 表示反，例如：$sg(THHTTH)=sg(TH)\oplus sg(TTH)\oplus sg(TTTTTH)$。

Nim 积

$a\otimes b=\text{mex}\{a'\otimes b\oplus a\otimes b'\oplus a'\otimes b'|0\le a'<a,0\le b'<b\}$ 满足交换律，结合律，对 nim 和（异或）满足分配律。全体非负整数在 nim 和和 nim 积下成一域。Tartan Games（即二维硬币游戏）的 sg 值是对应行列的 nim 积。

nim积还具有如下的性质：

- 对全体自然数 n，$[0,2^{2^{n}}-1]$ 中的自然数在 nim 和和 nim 积下成一域
- 对全体自然数 n，$2^{2^{n}}\otimes x=2^{2^{n}}\times x(0\le x<2^{2^{n}})$
- 对全体自然数 n，$2^{2^{n}}\otimes 2^{2^{n}}=\frac{3}{2}\cdot2^{2^{n}}=2^{2^{n}}\oplus2^{2^{n}-1}$

surreal number

$surreal\;number$ 是一个包含无穷小、无穷大和实数的域，用它可以十分方便地研究一些不平等博弈问题。$surreal\;number$ 定义为一个集合对 $\{L|R\}$，其中 L 中的每个元素小于 R 中的每个元素。我们称 $x\le y$ 当且仅当不存在 $x_{L}\in X_{L}$ 使得 $y\le x_{L}$，且不存在 $y_{R}\in Y_{R}$ 使得 $y_{R}\le x$。 $surreal\;number$ 有如下的一些性质：

- 对于一个 $surreal\;number$ $x=\{L|R\}$ ，x 大于 L 中的任意一个元素，小于 R 中的任意一个元素。
- 对于一个 $surreal\;number$ $x=\{L|R\}$ ，若 L 有最大值 l_{max}，则 $x=\{l_{max}|R\}$，对于 R 同理。

- 设 a 到 b 之间最早出生的 $surreal\;number$ 在第 i 天出生，那么在 a 到 b 之间且在第 i 天出生的 $surreal\;number$ 有且只有一个。
- 若 $a<x<b$ 且 x 是 a 和 b 之间最早出生的 $surreal\;number$，则 $x=\{a|b\}$

$surreal\;number$ 的加法法则为 $x+y=\{X_{L}|X_{R}\}+\{Y_{L}|Y_{R}\}=\{X_{L}+y,x+Y_{L}|X_{R}+y,x+Y_{R}\}$

$surreal\;number$ 的取反法则为 $-x=-\{X_{L}|X_{R}\}=\{-X_{R}|-X_{L}\}$

$surreal\;number$ 的乘法法则为 $xy=\{X_{L}|X_{R}\}\{Y_{L}|Y_{R}\}=\{X_{L}y+xY_{L}-X_{L}Y_{L}，X_{R}y+xY_{R}-X_{R}Y_{R}|X_{L}y+xY_{R}-X_{L}Y_{R}，xY_{L}+X_{R}y-X_{R}Y_{L}\}$

$surreal\;number$ 的取逆法则为 $\displaystyle{\frac{1}{y}=\{0,\frac{1+(y^{R}-y)(\frac{1}{y})^{L}}{y^{R}},\frac{1+(y^{L}-y)(\frac{1}{y})^{R}}{y^{L}}|\frac{1+(y^{L}-y)(\frac{1}{y})^{L}}{y^{L}},\frac{1+(y^{R}-y)(\frac{1}{y})^{R}}{y^{R}}\}}$，其中 $y^{L}>0,y^{R}>0$

设有一组合游戏处于局面 P，玩家 L 可以转移到的状态为 P^{L}，玩家 R 可以转移到的状态为 P^{R}，我们记 $P=\{P^{L}|P^{R}\}$，那么：

- 若 $P>0$，则不论先手还是后手，L 获胜
- 若 $P<0$，则不论先手还是后手，R 获胜
- 若 $P=0$，则后手获胜

类似于 Nim 和游戏，若有 n 个不平等游戏 $P_{1},\cdots,P_{n}$，它们分别对应的 $surreal\;number$ 为 $x_{1},\cdots,x_{n}$，则 $P_{1}+\cdots+P_{n}$ 对应的 $surreal\;number$ 为 $x_{1}+\cdots+x_{n}$。

最后给出一些无穷大和无穷小的 $surreal\;number$

$$ \begin{aligned}\\ &\{0|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\}=\epsilon(无穷小)\\ &\{0,1,2,3,\cdots|\}=\omega(无穷大)\\ &\{\epsilon|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\}=2\epsilon\\ &\{0|\epsilon\}=\frac{\epsilon}{2}\\ &\{0,1,2,3,\cdots,\omega|\}=\omega+1\\ &\{0,1,2,3,\cdots|\omega\}=\omega-1\\ &\{\omega|\omega+1\}=\omega+\frac{1}{2}\\ \end{aligned}\\ $$

SJ 定理

对一个 Nim 游戏，如果定义使得所有子游戏的 sg 值为 0 的玩家胜利，先手必胜的条件为：

- 游戏的 sg 值为 0 且所有子游戏 sg 值均不超过 1。
- 游戏的 sg 值不为 0 且至少一个子游戏 sg 值超过 1。

数学分析

Wallis公式

$$ \frac{\pi}{2} = \lim_{n \to +\infty}\frac{[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^{2}}{2n+1} $$

Stirling公式

$$ n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^{n} $$

n维球

n维球的体积公式：$\displaystyle{\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}r^{n}}$

n维球的表面积公式：$\displaystyle{\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}r^{n-1}=V_{n}'(r)}$

其中伽马函数 $\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}x^{z-1}e^{-x}\mathbb{d}x$ ，满足

- $\Gamma(1)=1,\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)(z>0)$
- $\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}(z\notin\mathbb{Z})$
- $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$
- $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

KKT 条件

设有函数 $f(\mathbf{p})$，我们要求在 $g_{1}(\mathbf{p})\le0,\cdots,g_{n}(\mathbf{p})\le0,h_{1}(\mathbf{p})=\cdots=h_{m}(\mathbf{p})=0$ 的条件下求其极值，则必要条件为：

$$ \begin{cases} &\nabla f(\mathbf{p})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i}\nabla h_{i}(\mathbf{p})+\sum_{i=1}^{n}\mu_{i}\nabla g_{i}(\mathbf{p})=0\\ &h_{i}(\mathbf{p})=0\\ &\mu_{i}g_{i}(\mathbf{p})=0\\ &\mu_{i}\ge0\\ &g_{i}(\mathbf{p})\le0 \end{cases} $$

可以看出这是拉格朗日乘因子法的推广。如果 f 是凸函数（注意凸函数要求定义域是凸集，即 g 和 h 的限制以及 f 的定义域都要是凸集），那么 KKT 条件是充要的。

组合数学

划分数

设 $p(n)$ 为将 n 写成若干个正整数和的方案数，若 i 为自然数，称 $\frac{3i^{2}-i}{2}$ 和 $\frac{3i^{2}+i}{2}$ 为广义五边形数，并定义 $f(\frac{3i^{2}-i}{2}) = f(\frac{3i^{2}+i}{2}) = i$，则 $p(n) = \sum_{u,1 \le u \le n}(-1)^{f(u) - 1}p(n-u)$，其中 u 为广义五边形

数，$\displaystyle{\phi(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{i})}$ 称为欧拉函数，它是划分数生成函数的逆，$\phi(x) = \sum_{u}(-1)^{f(u)}x^{u}$，其中 u 为广义五边形数。从 0 开始，$p(n)$ 的前若干项为 $1,1,2,3,5,7,11,15,22,30,42,56,77$ 。

模2意义下的组合数

${n\choose m}\% 2=!(m\And\sim n)$，由此易知，${n\choose m}\% 2=1$，当且仅当 n 在 m 为 1 的二进制位上也都为 1。易知，${n+m\choose m}\% 2=1$，当且仅当 n 在 m 为 1 的二进制位上都为 0。

默慈金数

设 M_{n} 表示在一个圆上的 n 个不同点间，画出彼此不相交的弦的全部方法的总数，$M_{0} = M_{1} = 1, M_{n + 1} = M_{n}+\sum_{i=0}^{n-1}M_{i}M_{n-i-1} = \frac{2n+3}{n+3}M_{n}+\frac{3n}{n+3}M_{n-1}$，它也可以表示数列 $\{a_{i}\}(0 \le i \le n)$ 的数量，满足，$a_{0} = a_{n} = 0, a_{i} \ge 0, |a_{i}-a_{i + 1}| \le 1$，从 0 开始，M_{n} 的前若干项为 $$ \begin{aligned} &1,1,2,4,9,21,51,127,323,835,2188,\\ &5798,15511,41835,113634,310572,853467,\\ &2356779,6536382,18199284,50852019,142547559,\\ &400763223,1129760415,3192727797,9043402501,\\ &25669818476,73007772802,208023278209,593742784829 \end{aligned} $$

卡特兰数

设 $C_{0}=1,C_{n}=\sum_{i=0}^{n-1}C_{i}C_{n-i-1}$，它满足 $\displaystyle{C_{n} = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}}$，它可以表示：

- n 对括号组成的合法的表达式种数
- n 个结点不同构二叉树的方案数
- $n \times n$ 格点中不越过对角线的单调路径的个数。单调路径是指从左下角走到右上角，每步向右或向上。
- 通过连接顶点将 $n+2$ 条边的凸多边形分成三角形的方案数
- 以 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 为进栈序列的合法出栈序列个数
- 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的不交叉划分的个数
- 用 n 个长方形填充一个高度为 n 的阶梯状图形的方法个数

从 0 开始， C_{n} 的前若干项为 $$ \begin{aligned} &1,1,2,5,14,42,132,429,1430,\\ &4862,16796,58786,208012,742900,\\ &2674440,9694845,35357670,129644790,\\ &477638700,1767263190 \end{aligned} $$

伯努利数

$B_{0} = 1, B_{i}=1-\sum_{j = 0}^{i-1}C_{i}^{j}\frac{B_{j}}{i-j+1}.$ 伯努利数的指数型母函数是 $\frac{x}{e^{x}-1}.$ 伯努利数可用于计算等幂和，$\sum_{k = 1}^{n}k^{m} =

\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}C_{m+1}^{k}B_{k}n^{m+1-k}.$ 从 0 开始B_{n} 的前若干项为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},0,-\frac{1}{30},0,\frac{1}{42},0,-\frac{1}{30}$

上升阶乘幂和下降阶乘幂

$(x)^{(n)}=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ 称为上升阶乘幂 $(x)_{n}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ 称为下降阶乘幂。 满足：

- $(a+b)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}{n\choose i}(a)^{(n-j)}(b)^{(j)}$
- $(a+b)_{n}=\sum_{i=0}^{n}{n\choose i}(a)_{n-j}(b)_{j}$
- $(x)_{m}(x)_{n}=\sum_{k=0}^{m}{m\choose k}{n\choose k}k!(x)_{m+n-k}$

斯特林数

第一类斯特林数

$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ 表示 n 个元素的置换中能被分解为 k 个循环的置换个数，并定义 $s(n,k)=(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}=n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}(k>0)$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=1$$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\n\end{bmatrix}=0(n>0)$ 该数列满足：

- $(x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{k}$
- $(x)_{n}=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^{k}$

也就是说，对于一个固定的 $n$$(x)^{(n)}$ 和 $(x)_{n}$ 分别是 $\{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\}$ 和 $\{s(n,k)\}$ 的生成函数。

对于一个固定的 $k$$\{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\}$ 的指数型生成函数为$\displaystyle{\frac{\ln^{k}\frac{1}{1-x}}{k!}=\sum_{n=k}^{+\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{x^{n}}{n!}}$

另外还有：

- $\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\sum_{k}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}{k\choose m}(-1)^{m-k}$
- $\begin{bmatrix}n+1\\m+1\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}\frac{n!}{k!}$
- $\begin{bmatrix}m+n+1\\m\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{m}(n+k)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}n\\l+m\end{bmatrix}{l+m\choose l}=\sum_{k}\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-k\\m\end{bmatrix}{n\choose k}$

第二类斯特林数

$\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}$ 表示有 n 个元素的集合划分为 k 个集合的方案数$\begin{Bmatrix}n+1\\k\end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}n\\k-1\end{Bmatrix}(k>0)$

$\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}=1$，$\begin{Bmatrix}n\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\n\end{Bmatrix}=0(n>0)$。 该数列满足：

- $\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}{k\choose i}(k-i)^{n}$

容易注意到这是一个卷积形式，可以 $\mathcal{O}(n\log n)$ 地求出一个 n 对应的所有第二类斯特林数

- $\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}(x)_{k}=x^{n}$
- $B_{n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}$（其中 B_{n} 是贝尔数）

对于一个固定的 k，$\{\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\}$ 的生成函数为 $\displaystyle{\sum_{n=k}^{+\infty}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}x^{n}=\frac{x^{k}}{\prod_{i=1}^{k}1-kx}}$，其指数型生成函数为 $\displaystyle{\sum_{n=k}^{+\infty}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\frac{x^{n}}{n!}=\frac{(e^{x}-1)^{k}}{k!}}$。

贝尔数

设 B_{n} 表示基数为 n 的集合的划分方法数，则 B_{n} 满足 $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}{n\choose k}B_{k}$，$B_{n}=\sum_{k=0}^{n}S(n, k)$，其中 S 是第二类斯特林数，对任意质数 p 有 $B_{n+p^{m}}\equiv mB_{n}+B_{n+1}\pmod{p}$，其指数型母函数是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n}}{n!}x^{n}=e^{e^{x}-1}$，从 0 开始，B_{n} 的前若干项为 $$ \begin{aligned} &1,1,2,5,15,52,203,877,\\ &4140,21147,115975,678570,\\ &4213597,27644437,190899322,\\ &1382958545,10480142147,82864869804,\\ &682076806159,5832742205057,51724158235372,\\ &474869816156751,4506715738447323,44152005855084346,\\ &445958869294805289,4638590332229999353,49631246523618756274 \end{aligned} $$

Burnside 引理

设 G 是一个有限群，作用于集合 X 上，对 $\forall g\in G$，X^{g} 表示 X 中在 g 作用下的不动元素的集合，$|X/G|$ 表示 X 在 G 作用下的轨道数，则有 $|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^{g}|$。

Polya 定理

设 $\bar{G}$ 是 n 个对象的一个置换群，用 m 种颜色涂染这 n 个对象，则不同染色的方案数为 $l=\frac{1}{|\bar{G}|}(m^{c(\bar{a_{1}})}+m^{c(\bar{a_{2}})}+\cdots+m^{c(\bar{a_{g}})})$，其中 $c(\bar{a_{i}})$ 表示置换 $\bar{a_{i}}$ 的循环节数。

切比雪夫多项式

第一类切比雪夫多项式为 $T_{n}(\cos x)=\cos nx$ □满足 $\displaystyle{[x^{m}]T_{n}=(-1)^{\frac{n-m}{2}}\frac{n}{m}{\frac{n+m}{2}-1\choose m-1}2^{m-1}}$ □第二类切比雪夫多项式为 $U_{n}(\cos x)=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$ □满足 $\displaystyle{[x^{m}]U_{n}=(-1)^{\frac{n-m}{2}}{\frac{n+m}{2}\choose \frac{n-m}{2}}2^{m}}$ □

杨式矩阵和钩子公式

杨式矩阵是指满足以下两个条件的矩阵：

- 如果格子 (i,j) 没有元素，则它右边和上边的相邻格子也一定没有元素。
- 如果格子 (i,j) 有元素 $a_{i,j}$ □则它右边和上边的相邻格子要么没有元素，要么有元素且比 $a_{i,j}$ 大。

$1\sim n$所组成杨氏矩阵的个数可以通过下面的递推式得到：

$F_{1}=1,F_{2}=2,F_{n}=F(n-1)+(n-1)F(n-2)$

钩子公式是指：对于给定形状，不同的杨氏矩阵的个数为□$n!$ 除以每个格子的钩子长度加 1 的积。其中钩子长度定义为该格子右边的格子数和它上边的格子数之和。

全错排

$1\sim n$ 的全错排数量为 $n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\frac{1}{i!}$

可拆分排列

排列的直和是指将两个排列拼起来，将右边的排列平移；排列的斜和是指将两个排列拼起来，将左边的排列平移。例如 $1,2$ 和 $1,2,3$ 的直和为 $1,2,3,4,5$，斜和为 $4,5,1,2,3$。定义可拆分排列为可以由 1 这一种排列经过若干次斜和和直和的运算得到的排列。

大 Schr\ddot{o}der 数

设 S_{n} 表示从 $(0,0)$ 走到 (n,n)□每次只能向右、向上、向右上走一步，且不能跨过 $(0,0)$ 到 (n,n) 的对角线的不同走法数量。那么有 $S_{0}=1,S_{1}=2,S_{n}=3S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}S_{k}S_{n-k-1}$□$S_{n}$ 的生成函数是 $\frac{1-x-\sqrt{x^{2}-6x+1}}{2x}$□$S_{n}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n-i+1}\frac{(2n-i)!}{i!((n-i)!)^{2}}$□

S_{n} 还可以表示长度为 $n+1$ 的可拆分排列的数量。

从 0 开始□S_{n} 的前若干项为 $$ \begin{aligned} &1,2,6,22,90,394,\\ &1806,8558,41586,206098,\\ &1037718,5293446,27297738,\\ &142078746,745387038,3937603038,\\ &20927156706,111818026018,600318853926,\\

&3236724317174,17518619320890,95149655201962,\\
&518431875418926,2832923350929742,15521467648875090 \end{aligned} $$

小 Schr\ddot{o}der 数

设 $s_{0}=1,s_{i+1}=\frac{S_{i}}{2}$，那么 $s_{n}=\frac{1}{n}((6n-9)s_{n-1}-(n-3)s_{n-2})$，$s_{n}$ 可以表示：

- 将 $n+1$ 边形剖分的方案数
- 给 n 个数加括号的方案数

库默尔定理

设 p 为质数，a,b 在 p 进制下的表示分别为 $\overline{\cdots a_{n}\cdots a_{0}}$ 和 $\overline{\cdots b_{n}\cdots b_{0}}$，那么 ${a\choose b}$ 中含有质因子 p 的个数为满足 $\overline{\cdots a_{i}\cdots a_{0}}<\overline{\cdots b_{i}\cdots b_{0}}$ 的下标 i 的个数。特别的，当 $a<b$ 时，${a\choose b}=0$，而满足条件的 i 也有无穷多个。从另一种角度来说，也可以理解成 b 和 $a-b$ 在做 p 进制加法时产生进位的次数。这可以得到一个显然的推论：${a\choose b}$ 中 p 的个数不超过 $\log_{p}a$。

不动函数的数量

设 $f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$，且 $\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{k个}(i)=f(i)$ 对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 成立，那么满足条件的 f 指数型生成函数为 $\exp(\sum_{i\mid k-1}(x\cdot \exp(x))^{i}/i)$

其它

$\sum{n\choose2k}{k\choose m}=\frac{n}{n-m}{n-m\choose n-2m}2^{n-2m-1}$

数论

连分数与佩尔方程

记 $<x_{0},x_{1},x_{2},x_{3},\cdots> = x_{0}+\frac{1}{x_{1}+\frac{1}{x_{2}+\frac{1}{x_{3}+\cdots}}}$ ，其中 $x_{i}>0(i\ge1)$ ，称 $\frac{p_{n}}{q_n}=<x_{0},x_{1},\cdots,x_{n}>$ 为它的第 n 个渐近分数。补充定义 $p_{-1}=1,q_{-1}=0$ ，则有递推式 $p_{n}=x_{n}p_{n-1}+p_{n-2},q_{n}=x_{n}q_{n-1}+q_{n-2}(n\ge1)$ ，对无限简单连分数，我们称 $\xi_{n}=<x_{n},x_{n+1},\cdots>$ 为它的第 n 个完全商，满足

$\xi_{0}=\frac{p_{n}\xi_{n+1}+p_{n-1}}{q_{n}\xi_{n+1}+q_{n-1}}$一个实数是二次根式当且仅当它是循环简单连分数，我们用 $<x_{0},\cdots,x_{m_{0}-1},<\overline{x_{m_{0}},\cdots,x_{m_{0}+l-1}}>>$ 其中 l 是 ξ_{0} 的周期。设 $\xi_{0}=\frac{\sqrt{d}+c_{0}}{r_{0}},q_{0}|d-c^{2}_{0}$ 我们有 $\xi_{n}=\frac{\sqrt{d}+c_{n}}{r_{n}}$ 其中 $r_{n+1}=r_{n-1}+\frac{c_{n}^{2}-c_{n+1}^{2}}{r_{n}}=r_{n-1}+(c_{n}-c_{n+1})x_{n}$,$c_{n+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}$,$a_{n}=\lfloor\xi_{n}\rfloor(n\ge1)$

我们给出两个不定方程$x-dy^{2}=1$ 和 $x-dy^{2}=-1$若 d 为完全平方数，则第一个方程只有解 $(\pm1,0)$第二个方程无解。若 d 不为完全平方数，设 $\xi_{0}=\sqrt{d}$设它的循环连分数周期为 l渐近分数为 $\frac{p_{n}}{q_{n}}$则：

- 当 l 为偶数时，第一个方程的全体正解为 $x=p_{jl-1},y=q_{jl-1},j=1,2,3,\cdots$第二个方程无解
- 当 l 为奇数时，第一个方程的全体正解为 $x=p_{jl-1},y=q_{jl-1},j=2,4,6,\cdots$第二个方程的全体正解为 $x=p_{jl-1},y=q_{jl-1},j=1,3,5,\cdots$

还有另一种更加简单的表示方法：

- 当 l 为偶数时，第一个方程的全体解为 $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{l-1}\pm q_{l-1}\sqrt{d})^{j},j=0,1,2,\cdots$第二个方程无解
- 当 l 为奇数时，第一个方程的全体正解为 $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{l-1}\pm q_{l-1}\sqrt{d})^{j},j=0,2,4,\cdots$第二个方程的全体正解为 $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{l-1}\pm q_{l-1}\sqrt{d})^{j},j=1,3,5,\cdots$

设有一佩尔方程 $x^{2}-ny^{2}=k$利用 Brahmagupta’s identity 求解$(a^{2}+nb^{2})(c^{2}+nd^{2})=(ac-nbd)^{2}+n(ad+bc)^{2}=(ac+nbd)^{2}+n(ad-bc)^{2}$

设 (x_{1},y_{1}) 是 $x^{2}-ny^{2}=k$ 的最小解(x_{2},y_{2}) 是 $x^{2}-ny^{2}=1$ 的解，那么 $(x_{1}^{2}-ny_{1}^{2})(x_{2}^{2}-ny_{2}^{2})=(x_{1}x_{2}+ny_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2}+x_{2}y_{1})^{2}=(x_{1}x_{2}-ny_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2}-x_{2}y_{1})^{2}=k$从而 $(x_{1}x_{2}+ny_{1}y_{2},x_{1}y_{2}+x_{2}y_{1})$ 和 $(x_{1}x_{2}-ny_{1}y_{2},x_{1}y_{2}-x_{2}y_{1})$ 都是原方程的解。

对于 $ax^{2}-by^{2}=c$ 型的佩尔方程，改写成 $(ax)^{2}-aby^{2}=ac$ 的形式就可以了。

指数循环节

对 $\forall a, b, n \in N^{+}, b \ge \phi(n)$有 $a ^ {b} \equiv a ^ {b \% \phi(n) + \phi(n)}\pmod{n}$注意 $b \ge \phi(n)$ 是必要条件，以及式子中取模后指数必须加上 $\phi(n)$否则结果可能会出错。

威尔逊定理

$$ \prod_{i=1,\gcd(i,m)=1}^{m}i\equiv\begin{cases} &-1&(m=1,2,4,p^{l},2p^{l},\text{ p is odd prime})\\ &1&(\text{otherwise}) \end{cases}\pmod{m} $$

类欧几里得算法

设 $f(a,b,c,n,t_{1},t_{2})=\sum_{i=0}^{n}i^{t_{1}}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor^{t_{2}}$，求解这一函数值的算法称为类欧几里得算法。这里仅讨论 6 个参数均为非负整数的情况，且定义 $0^{0}=1$：

定义 $m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor$，$g_{t}(x)=(x+1)^{t}-x^{t}=\sum_{i=0}^{t-1}g_{ti}x^{i}$，$h_{t}(x)=\sum_{i=1}^{x}i^{t}=\sum_{i=0}^{t+1}h_{ti}x_{i}$。

- 若 $t_{2}=0$，有：

$$ 原式=h_{t_{1}}(n)+[t_{1}=0] $$

- 若 $m=0$，有：

$$ 原式=0 $$

- 若 $a=0$，有：

$$ 原式=\lfloor\frac{b}{c}\rfloor^{t_{2}}(h_{t_{1}}(n)+[t_{1}=0]) $$

- 若 $a\ge c$ 或 $b\ge c$，有：

$$ 原式=\sum_{u_{1}+u_{2}+u_{3}=t_{2}}{t_{2}\choose u_{1},u_{2},u_{3}}(\lfloor\frac{a}{c}\rfloor)^{u_{2}}(\lfloor\frac{b}{c}\rfloor)^{u_{3}}f(a\%c,b\%c,c,n,t_{1}+u_{2},u_{1}) $$

- 若 $0\le a,b<c$，有：

$$ 原式=m^{t_{2}}h_{t_{1}}(n)-\sum_{u=0}^{t_{2}-1}\sum_{v=0}^{t_{1}+1}g_{t_{2}u}h_{t_{1}v}f(c,c-b-1,a,m-1,u,v) $$

特别地，若 $t_{1}=0,t_{2}=1$，则有：

- 若 $m=0$，有：

$$ 原式=0 $$

- 若 $a=0$，有：

$$ 原式=\lfloor\frac{b}{c}\rfloor(n+1) $$

- 若 $a\ge c$ 或 $b\ge c$，有：

$$ 原式=\frac{n(n+1)}{2}\lfloor\frac{a}{c}\rfloor+(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+f(a\%c,b\%c,c,n) $$

- 若 $0\le a,b<c$，有：

$$ 原式=nm-f(c,c-b-1,a,m-1) $$

证明

其他

$x^{2}+y^{2}=t$ 的整数解的个数为 $4(\sigma_{1}(t)-\sigma_{3}(t))$□其中 $\sigma_{1}(t)$ 表示 t 的约数中模 4 余 1 的个数□$\sigma_{3}(t)$ 表示 t 的约数中模 4 余 3 的个数。

设有 m 个正整数 $c_{1},c_{2},\cdots,c_{m}$□且严格递增。所有大于等于 $c_{m-1}c_{m}$□且能被 $\gcd(c_{1},c_{2},\cdots,c_{m})$ 整除的整数可以用这 m 个数使用非负整系数线性表示。证明

线性代数

矩阵的秩等于它最大的非零子式的阶数。对称矩阵的秩等于它最大的非零主子式的阶数（即选取同样的行和列）。对称矩阵情况下的证明，好难找啊。。

抽象代数

有限群中元素的幂

设 G 为一有限群。令 $|G|=n$□对于 G 的每个元素 a 有 $a^{n}=e$ □

计算几何

球面几何

设球冠的高为 h□半径为 R□则表面积为 $2\pi Rh$□

球面三角形的面积为 $(A+B+C-\pi)R^{2}$ □

球面正弦定理□$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

球面余弦定理□$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$, $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$

皮克定理

设有一格点多边形，其面积 $S=a+\frac{b}{2}-1$□其中 a 表示多边形内部的整点数□b 表示多边形边界上的整点数。

直线反演

将 $y=kx+b$ 反演到 $(-k,b)$□将 (k,b) 反演到 $y=-kx+b$□这样，两点共线反演为两条直线交于一点，

该点是原直线反演出的点。

笛卡尔定理

假设有四个两两相切的圆，设第 i 个的曲率为 $k_{i}=\pm\frac{1}{r_{i}}$ 当该圆与其它圆相外切时，曲率为正，否则为负。那么有 $2\sum_{i=1}^{4}k_{i}^{2}=(\sum_{i=1}^{4}k_{i})^{2}$ 推广到 n 维，有 $n\sum_{i=1}^{n+2}k_{i}^{2}=(\sum_{i=1}^{n+2}k_{i})^{2}$

其它

简单多边形中的抛物线长度可以用有向线段来计算。

极角排序后扫描线可以分成上下两个半平面后归并。

有理坐标正多边形只有正方形一种。

三角形的垂心、外心、重心和九点圆圆心共线，其中九点圆圆心到垂心和外心的距离相等，而且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半。

其它

拉格朗日插值法

对某个多项式函数，已知有给定的 $k+1$ 个取值点 $(x_{0},y_{0}),\cdots,(x_{k},y_{k})$ 则有 $L(x)=\sum\limits_{i=0}^{k}y_{i}l_{i}(x)$ 其中每个 $l_{i}(x)$ 为拉格朗日基本多项式，其表达式为 $l_{i}(x)=\prod\limits_{j=0,j\neq i}^{k}\frac{x-x_{j}}{x_{i}-x_{j}}$

牛顿迭代法

$x_{n+1}=x_{n}-\frac{f(x_{n})}{f'(x_{n})}$

Stern-Brocut tree

设有一棵无限的区间树，根结点所表示的区间为$[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$ 设父结点所表示的区间为 $[\frac{a}{b},\frac{c}{d}]$ 则它的左右孩子分别表示 $[\frac{a}{b},\frac{a+c}{b+d}]$ 和 $[\frac{a+c}{b+d},\frac{c}{d}]$ 这棵树不重不漏地表示了所有正的既约的有理数。

Tree of primitive Pythagorean triples

设有一棵无限的满三叉树，根结点表示列向量 $(3,4,5)^{T}$ 设有三个矩阵 $$ A=\begin{pmatrix}

1&-2&2\\ 2&-1&2\\ 2&-2&3\\ \end{pmatrix} $$

$$ B=\begin{pmatrix} 1&2&2\\ 2&1&2\\ 2&2&3\\ \end{pmatrix} $$

$$ C=\begin{pmatrix} -1&2&2\\ -2&1&2\\ -2&2&3\\ \end{pmatrix} $$

设父结点的向量为 α□则它从左到右的三个孩子的向量分别为 $A\alpha, B\alpha, C\alpha$□这棵树不重不漏地枚举完了所有基本毕达哥拉斯三元组□$a^{2}+b^{2}=c^{2}$□□

最大反链

给定一个非负整数数列 $\{t_{i}\}$□定义偏序集 $S=\prod_{i=1}^{n}\{x|0\le x\le t_{i},x\in\mathbb{Z}\}$□其中 $\vec{x}\preceq\vec{y}$ 当且仅当 $\forall 1\le i\le n,x_{i}\le y_{i}$□那么 S 的最大反链的大小等于关于 x_{i} 的不定方程 $\displaystyle{\sum_{i=1}^{n}x_{i}=\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{n}t_{i}}{2}\rfloor}$ 满足 $\forall 1\le i\le n, 0\le x_{i}\le t_{i}$ 的整数解的个数。证明

矩阵乘法

设 $\oplus,\otimes$ 为二元运算，且 $\oplus$ 满足交换律和结合律□$\otimes$ 满足结合律□$\otimes$ 对 $\oplus$ 满足分配律。定义新的矩阵乘法 $A_{n,m}\times B_{m,p}=C_{n,p}$□其中 $c_{i,j}=\bigoplus_{k=1}^{m}a_{i,k}\otimes b_{k,j}$□那么这种矩阵乘法满足结合律。除了通常的 $\oplus$ 代表加法和 $\otimes$ 代表乘法外□$\oplus$ 代表取最大/最小值□$\otimes$ 代表加法；在 $[0,+\infty)$ 上定义 $\oplus$ 代表取最大/最小值□$\otimes$ 代表乘法，都满足条件。其中后两者对一些求最优值的 dp 优化有一定的作用。证明

gcc内建二进制函数

- `__builtin_popcount(x)` 表示 x 二进制中 1 的个数。
- `__builtin_parity(x)` 表示 x 二进制中 1 的个数的奇偶性。
- `__builtin_clz(x)` 表示 x 二进制中前导 0 的个数。
- `__builtin_ctz(x)` 表示 x 二进制中结尾 0 的个数。
- `__builtin_ffs(x)` 表示 x 二进制中右起第一个 1 的位置。

以上函数传入的参数为 `unsigned int`，如需对 `unsigned long long` 使用，需要在函数名的最后加上 `ll`，如 `__builtin_popcountll`□`__builtin_clz(x)` 和 `__builtin_ctz(x)` 两者在 $x=0$ 时未定义

一类关于集合的计数问题

设有两个集合 $A,B\subset\mathbb{N}$□且 $0\in A,1\in B,|A|=n,|B|=m$□定义 $A+B=\{x+y|x\in A,y\in B\}$□若 $A+B=[1,nm]\cap\mathbb{N}^{+}$□则称 (A,B) 是好的。问这样的集合对有多少个。

这一问题的答案为：

$$ \begin{cases} &1&(n=1\lor m=1)\\ &f(n,m)+f(m,n)&(n>1\land m>1) \end{cases} $$

其中 $f(n,m)=\sum_{i=1}^{+\infty}g_{i}(n)(g_{i}(m)+g_{i+1}(m))$，$g_{i}(n)$ 表示将 n 分解成 i 个大于 1 的数的乘积的方案数（有序）。证明

加法链

对于一个正整数 n，它的一个加法链是一个序列 $v_{0},\cdots,v_{s}$，其中 $v_{0}=1,v_{s}=n$，对于所有的 $v_{1},\cdots,v_{s}$，它们都是前面某两个数的和。一种常见的较短的加法链即为快速幂对指数的拆分方法。设 n 的二进制表示下 1 的个数为 $v(n)$，那么使用快速幂的加法链的长度为 $\lfloor\log_{2}n\rfloor+v(n)-1$，另外，设 n 最短的加法链长度为 $l(n)$，$Knuth$ 猜想 $l(n)\ge\lfloor\log_{2}n\rfloor+\lceil\log_{2}v(n)\rceil$，且这一猜想对 $v(n)\le8$ 已经得到证明。

高斯数值积分

求一个 $[-1,1]$ 上的积分，可以使用高斯积分。它近似等于 $\sum_{i=1}^{n}w_{i}f(x_{i})$，当 $f(x)$ 可以用不超过 $2n-1$ 次的多项式近似时，此方法精度较高。下面对 $n=1\sim5$ 列出 w 和 f 的表。

n	x_{i}	w_{i}
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

若积分区间不是 $[-1,1]$，那么需要变换积分区间，$\int_{a}^{b}f(x)\mathbb{d}x=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}f(\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2})\mathbb{d}x$