2025/11/29 20:41 1/16 博弈论

部分链接尚未搬运~

博弈论

威佐夫游戏

有两堆石子,两人轮流取,每次可以从一堆中取若干颗石子,也可以从两堆中取一样多的石子。负态为 ${\foothermall} \{1+\foothermall} \{2\}\rfloor, k+\foothermall} \{3\}\rfloor, k+\foothermall} \{4\}\rfloor, k+\foothermall} \{5\}\rfloor, k+\foothermall} \{4\}\rfloor, k+\foothermall} \{4\}\r$

翻硬币游戏

翻硬币游戏是指这样的一种组合游戏:有 \$n\$ 枚硬币排成一排,开始时它们有的正面朝上,有的反面朝上,两名玩家轮流按照一定的规则,翻转一些硬币,最后不能操作者输。这里的规则必须满足以下两点:

- 最右边的硬币必须是从正面翻转到反面(为了保证游戏结束)
- 规则允许的翻转位置集合唯一取决于最右侧硬币的位置,而与之前的操作、玩家等无关(为保证这是一个平等博弈)

翻硬币游戏有这样一个结论:一个局面的 \$sg\$ 值等于所有正面硬币的 \$sg\$ 值的异或,以 H 表示正,T 表示反,例如□\$sg(THHTTH)=sg(TH)\oplus sg(TTH)\oplus sg(TTTTTH)\$□

Nim 积

\$a\otimes b=\text{mex}\{a'\otimes b\oplus a\otimes b'\oplus a'\otimes b'|0\le a'<a,0\le b'<b\}\$ 满足交换律,结合律,对 nim 和(异或)满足分配律。全体非负整数在 nim 和和 nim 积下成一域□Tartan Games□即二维硬币游戏)的 \$sg\$ 值是对应行列的 nim 积。

nim积还具有如下的性质:

- \$0\otimes x=x\otimes0=0\$□\$x\otimes y=0\$ 当且仅当 \$x=0\lor y=0\$
- \$1\otimes x=x\otimes1=x\$
- 对全体自然数 \$n\$□\$[0,2^{2^{n}}-1]\$ 中的自然数在 nim 和和 nim 积下成一域
- 对全体自然数 \$n\$□\$2^{2^{n}}\otimes x=2^{2^{n}}\times x(0\le x<2^{2^{n}})\$
- 对全体自然数 \$n\$[]\$2^{2^{n}}\otimes2^{2^{n}}=\frac{3}{2}\cdot2^{2^{n}}=2^{2^{n}}\oplus2^{2^{n}-1}\$

surreal number

\$surreal\;number\$ 是一个包含无穷小、无穷大和实数的域,用它可以十分方便地研究一些不平等博弈问题[]\$surreal\;number\$ 定义为一个集合对 \$\{L|R\}\$|]其中 \$L\$ 中的每个元素小于 \$R\$ 中的每个元素。我们称 \$x\le y\$ 当且仅当不存在 \$x_{L}\in X_{L}\$ 使得 \$y\le x_{L}\$|]且不存在 \$y_{R}\in Y_{R}\$ 使得 \$y {R}\le x\$|| \$surreal\;number\$ 有如下的一些性质:

• 对于一个 \$surreal\;number\$ \$x=\{L|R\}\$ □\$x\$ 大于 \$L\$ 中的任意一个元素,小于 \$R\$ 中的任意

一个元素。

- 对于一个 \$surreal\;number\$ \$x=\{L|R\}\$ □若 \$L\$ 有最大值 \$I_{max}\$□则 \$x=\{I_{max}}R\}\$□ 对于 \$R\$ 同理。
- 设 \$a\$ 到 \$b\$ 之间最早出生的 \$surreal\;number\$ 在第 \$i\$ 天出生,那么在 \$a\$ 到 \$b\$ 之间且在第 \$i\$ 天出生的 \$surreal\;number\$ 有且只有一个。
- 若 \$a<x<b\$ 且 \$x\$ 是 \$a\$ 和 \$b\$ 之间最早出生的 \$surreal\;number\$□则 \$x=\{a|b\}\$

\$surreal\;number\$的加法法则为

$$x+y=(X_{L}|X_{R})+(Y_{L}|Y_{R})=(X_{L}+y,x+Y_{L}|X_{R}+y,x+Y_{R})$$

\$surreal\;number\$ 的取反法则为 \$-x=-\{X_{L}|X_{R}\}=\{-X_{R}|-X_{L}\}\$

\$surreal\;number\$ 的取逆法则为 \$\displaystyle{\frac{1}{y}=\{0,\frac{1+(y^{R}-y)(\frac{1}{y})^{L}}{y^{R}},\frac{1+(y^{L}-y)(\frac{1}{y})^{R}}{y^{L}}\\frac{1+(y^{L}-y)(\frac{1}{y})^{R}}{y^{L}}\\frac{1+(y^{L}-y)(\frac{1}{y})^{R}}{y^{R}}\}\$□其中 \$y^{L}>0,y^{R}>0\$

设有一组合游戏处于局面 \$P\$□玩家 \$L\$ 可以转移到的状态为 \$P^{L}\$□玩家 \$R\$ 可以转移到的状态为 \$P^{R}\$□我们记 \$P=\{P^{L}|P^{R}\}\$□那么:

- 若 \$P>0\$□则不论先手还是后手□\$L\$ 获胜
- 若 \$P<0\$□则不论先手还是后手□\$R\$ 获胜
- 若 \$P=0\$□则后手获胜

类似于 \$Nim\$ 和游戏,若有 \$n\$ 个不平等游戏 $P_{1},\cdot P_{n}$ 0 它们分别对应的 \$surreal\;number\$ 为 $x_{1},\cdot P_{n}$ 0 \$surreal\;number\$ 为 x_{n}^0 0 \$surreal\;number\$ 为 \$x_{1}+\cdots+x_{n}^0

最后给出一些无穷大和无穷小的 \$surreal\;number\$

 $\$ \begin{aligned}\\ &\{0|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\} =\epsilon(无穷小)\\ &\{0,1,2,3,\cdots|\} =\omega(无穷大)\\ &\{\epsilon|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\} = 2\epsilon\\ &\{0|\epsilon\} = \frac{1}{4},\cdots\} = 2\epsilon\\ &\{0|\epsilon\} = \frac{1}{4},\cdots\} = 2\epsilon\\ &\{0|\epsilon\} = \frac{1}{4},\cdots\} = 2\epsilon\\ &\{0,1,2,3,\cdots,\omega|\} = omega + 1\\ &\{0,1,2,3,\cdots|\omega+1\} = omega + \frac{1}{2}\\ end{aligned}\\ \$\$

SJ定理

对一个 \$Nim\$ 游戏,如果定义使得所有子游戏的 \$sq\$ 值为 \$0\$ 的玩家胜利,先手必胜的条件为:

- 游戏的 \$sq\$ 值为 \$0\$ 且所有子游戏 \$sq\$ 值均不超过 \$1\$。
- 游戏的 \$sg\$ 值不为 \$0\$ 且至少一个子游戏 \$sg\$ 值超过 \$1\$。

2025/11/29 20:41 3/16 博弈论

数学分析

Wallis公式

 $frac{\pi_{n \to \pi_{n \to + \to + }}}}}}}}}}}}}}}}}}$

Stirling公式

 $n!\simeq n}(\frac{n}{e})^{n}$

n维球

\$n\$维球的体积公式[]\$\displaystyle{\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}r^{n}}\$

\$n\$维球的表面积公

式 $\$ \displaystyle{\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}r^{n-1}=V_{n}'(r)}\$

- $\Gamma(z)=1,\Gamma(z)=z\Gamma(z)$
- \$\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}(z\notin\mathbb{Z})\$
- \$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)\$
- \$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\$

KKT 条件

设有函数 \$f(\mathbf{p})\$□我们要求在

\$g_{1}(\mathbf{p})\le0,\cdots,g_{n}(\mathbf{p})\le0,h_{1}(\mathbf{p})=\cdots=h_{m}(\mathbf{p}))=0\$ 的条件下求其极小值,则必要条件为:

 $$$ \left(\frac{i}(\mathcal{p}) + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{g}_i \right) + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{g}_i (\mathcal{p}) + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{g}_i (\mathcal{p}) = 0 \ \& \mu_i (\mathcal{p}) = 0 \ \& \mu$

可以看出这是拉格朗日乘因子法的推广。如果 \$f\$ 是凸函数(注意凸函数要求定义域是凸集,即 \$g\$ 和 \$h\$ 的限制以及 \$f\$ 的定义域都要是凸集),那么 KKT 条件是充要的。

组合数学

划分数

设 \$p(n)\$ 为将 \$n\$ 写成若干个正整数和的方案数,若 \$i\$ 为自然数,称 \$\frac{3i^{2}-i}{2}\$ 和 \$\frac{3i^{2}+i}{2}\$ 为广义五边形数,并定义 \$f(\frac{3i^{2}-i}{2}) = f(\frac{3i^{2}+i}{2}) = i\$\] 则 \$p(n) = \sum_{u,1 \le u \le n}(-1)^{f(u) - 1}p(n-u)\$\]其中 \$u\$ 为广义五边形数 数\]\$\displaystyle{\phi(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{i})}\$ 称为欧拉函数,它是划分数生成函数的 逆\]\$\phi(x) = \sum_{u}(-1)^{f(u)}x^{u}\$\]其中 \$u\$ 为广义五边形数。从 \$0\$ 开始\]\$p(n)\$ 的前若干项为\$1,1,2,3,5,7,11,15,22,30,42,56,77\$。

划分容斥

在集合 \$S\$ 上定义一个等价关系,有 \$n\$ 个位置可以取 \$S\$ 中的值,要求两两值不同,另外还有一些别的限制。设 \$M=\{1,2,\cdots,n\}\$ \square 可以在 \$M\$ 的划分上进行容斥 \square \$P\$ 表示 \$P\$ 中每个子集中的元素相等,而子集间的关系不受限制,那么 \$P\$ 的容斥系数是 \$\prod_{Q\in P}(-1)^{|Q|-1}(|Q|-1)!\$ \square 特别地,如果这 \$n\$ 的位置本质相同,还可以枚举划分数来做。证明

模2意义下的组合数

\${n\choose m}\% 2=!(m\And\sim n)\$□由此易知□\${n\choose m}\% 2=1\$□当且仅当 \$n\$ 在 \$m\$ 为 \$1\$ 的二进制位上也都为 \$1\$。易知□\${n+m\choose m}\% 2=1\$□当且仅当 \$n\$ 在 \$m\$ 为 \$1\$ 的二进制位上都为 \$0\$。

默慈金数

设 \$M_{n}\$ 表示在一个圆上的 \$n\$ 个不同点间,画出彼此不相交的弦的全部方法的总数 \square \$M_{0} = M_{1} = 1, M_{n + 1} = M_{n}+\sum_{i=0}^{n-1}M_{i}M_{n-i-1} = \frac{2n+3}{n+3}M_{n}+\frac{3n}{n+3}M_{n-1}\$\subseteq \text{voluminary} \text{voluminary

卡特兰数

设 \$C_{0}=1,C_{n}=\sum_{i=0}^{n-1}C_{i}C_{n-i-1}\$□它满足 \$\displaystyle{C_{n} = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}}\$□它可以表示:

- \$n\$ 对括号组成的合法的表达式种数
- \$n\$ 个结点不同构二叉树的方案数
- \$n \times n\$ 格点中不越过对角线的单调路径的个数。单调路径是指从左下角走到右上角,每步向右或向上。

2025/11/29 20:41 5/16 博弈论

- 通过连接顶点将 \$n+2\$ 条边的凸多边形分成三角形的方案数
- 以 \$\{1, 2, \cdots, n\}\$ 为进栈序列的合法出栈序列个数
- 集合 \$\{1, 2, \cdots, n\}\$ 的不交叉划分的个数
- 用 \$n\$ 个长方形填充一个高度为 \$n\$ 的阶梯状图形的方法个数

从 \$0\$ 开始[] \$C_{n}\$ 的前若干项为 \$\$ \begin{aligned} &1,1,2,5,14,42,132,429,1430,\\ &4862,16796,58786,208012,742900,\\ &2674440,9694845,35357670,129644790,\\ &477638700,1767263190 \end{aligned} \$\$

伯努利数

上升阶乘幂和下降阶乘幂

\$(x)^{(n)}=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)\$ 称为上升阶乘幂□ \$(x)_{n}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\$ 称为下降阶乘幂。满足:

- \$(a+b)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}{n\choose i}(a)^{(n-j)}(b)^{(j)}\$
- \$(a+b) {n}=\sum {i=0}^{n}{n\choose i}(a) {n-j}(b) {j}\$
- $(x)_{m}(x)_{n}=\sum_{k=0}^{m}{m \choose k} {n \choose k} {n \choose k} {m+n-k}$

斯特林数

第一类斯特林数

 $\$ \$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\$ 表示 \$n\$ 个元素的置换中能被分解为 \$k\$ 个循环的置换个数,并定义 \$s(n,k)=(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\$\ \$\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}=n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}\n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\cho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}=\begin

- $(x)^{(n)}=\sum {k=0}^{n}\operatorname{bmatrix}n\k\end{bmatrix}x^{k}$
- $(x)_{n}=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^{k}$

也就是说,对于一个固定的 \$n\$[]\$(x)^{(n)}\$ 和 \$(x)_{n}\$ 分别是 \$\{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\}\$ 和 \$\{s(n,k)\}\$ 的生成函数。

对于一个固定的 \$k\$[]\$\{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\}\$ 的指数型生成函数 为[]\$\displaystyle{\frac{\ln^{k}\frac{1}{1x}}{k!}=\sum_{n=k}^{+\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{x^{n}}{n!}}\$[

另外还有:

- \$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\sum_{k}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}{k\cho ose m}(-1)^{m-k}\$
- $\ \$ \begin{bmatrix}n+1\\m+1\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}\ \begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix} \x\\frac{n!}{k!}\$
- $\$ \begin{bmatrix}m+n+1\\m\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{m}(n+k)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}\$
- \$\begin{bmatrix}n\\I+m\end{bmatrix}{I+m\choose
 I}=\sum_{k}\begin{bmatrix}k\\I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-k\\m\end{bmatrix}{n\choose
 k}\$

第二类斯特林数

容易注意到这是一个卷积形式,可以 \$\mathcal{O}(n\log n)\$ 地求出一个 \$n\$ 对应的所有第二类斯特林数

- $\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Bmatrix}_n\k \in {Bmatrix}_x (x) {k}=x^{n}$
- \$B {n}=\sum {k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\$□其中 \$B {n}\$ 是贝尔数)

对于一个固定的 $k^{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}_{\sh}$

贝尔数

2025/11/29 20:41 7/16 博弈论

Burnside 引理

设 \$G\$ 是一个有限群,作用于集合 \$X\$ 上,对 \$\forall g\in G\$[]\$X^{g}\$ 表示 \$X\$ 中在 \$g\$ 作用下的不动元素的集合[]\$|X/G|\$ 表示 \$X\$ 在 \$G\$ 作用下的轨道数,则有 \$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^{g}|\$[]

Polya 定理

切比雪夫多项式

第一类切比雪夫多项式为 $T_{n}(\cos x)=\cos nx$ [满足 $\sin x = \frac{x^{m}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{m}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{m}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{m}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{n}{2}}T_{n}=(-1)^{\frac{$

杨式矩阵和钩子公式

杨式矩阵是指满足以下两个条件的矩阵:

- 如果格子 \$(i,i)\$ 没有元素,则它右边和上边的相邻格子也一定没有元素。
- 如果格子 \$(i,j)\$ 有元素 \$a_{i,j}\$ □则它右边和上边的相邻格子要么没有元素,要么有元素且比 \$a_{i,j}\$ 大。

\$1\sim n\$所组成杨氏矩阵的个数可以通过下面的递推式得到:

 $F {1}=1,F {2}=2,F {n}=F(n-1)+(n-1)F(n-2)$

钩子公式是指:对于给定形状,不同的杨氏矩阵的个数为□\$n!\$除以每个格子的钩子长度加\$1\$的积。其中钩子长度定义为该格子右边的格子数和它上边的格子数之和。

全错排

\$1\sim n\$ 的全错排数量为 \$n!\sum {i=0}^{n}(-1)^{i}\frac{1}{i!}\$

可拆分排列

排列的直和是指将两个排列拼起来,将右边的排列平移;排列的斜和是指将两个排列拼起来,将左边的排列平移。例如 \$1,2\$ 和 \$1,2,3\$ 的直和为 \$1,2,3,4,5\$,斜和为 \$4,5,1,2,3\$。定义可拆分排列为可以由 \$1\$ 这一种

排列经过若干次斜和和直和的运算得到的排列。

大 Schr\ddot{o}der 数

设 S_{n} 表示从 (0,0) 走到 (n,n) 每次只能向右、向上、向右上走一步,且不能跨过 (0,0) 到 (n,n) 的对角线的不同走法数量。那么有

\$S_{0}=1,S_{1}=2,S_{n}=3S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}S_{k}S_{n-k-1}\$\psi \$\sum_{k=1}^{n-2}S_{k}S_{n-k-1}\$\psi \$\sum_{k=1}^{n-2}S_{k}S_{n}\$\$ 的生成函数是 \$\frac{1-x-\sqrt{x^{2}-6x+1}}{2x}\$\psi \$S_{n}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n-i+1}\frac{(2n-i)!}{i!((n-i)!)^{2}}\$\psi \$\psi \$\sum_{k=1}^{n-2}S_{k}S_{n}\$\$

\$S {n}\$ 还可以表示长度为 \$n+1\$ 的可拆分排列的数量。

从\$0\$ 开始\\\\$ 的前若干项为\$\$\begin{aligned} &1,2,6,22,90,394,\\ &1806,8558,41586,206098,\\ &1037718,5293446,27297738,\\\ &142078746,745387038,3937603038,\\ &20927156706,111818026018,600318853926,\\\ &3236724317174,17518619320890,95149655201962,\\\ &518431875418926,2832923350929742,15521467648875090 \end{aligned} \$\$

小 Schr\ddot{o}der 数

设 \$s_{0}=1,s_{i+1}=\frac{S_{i}}{2}\$□那么 \$s_{n}=\frac{1}{n}((6n-9)s_{n-1}-(n-3)s_{n-2})\$□\$s_{n}\$ 可以表示:

- 将 \$n+1\$ 边形剖分的方案数
- 给 \$n\$ 个数加括号的方案数

库默尔定理

设 \$p\$ 为质数 \square \$a,b\$ 在 \$p\$ 进制下的表示分别为 \$\overline{\cdots a_{n}\cdots a_{0}}\$ 和 \$\overline{\cdots b_{n}\cdots b_{0}}\$\Delta \${a\choose b}\$ 中含有质因子 \$p\$ 的个数为满足 \$\overline{\cdots a_{i}\cdots a_{0}}<\overline{\cdots b_{i}\cdots b_{0}}\$ 的下标 \$i\$ 的个数。特别 的,当 \$a<bb 付,\${a\choose b}=0\$\Delta \Delta \Delt

不动函数的数量

设 \$f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}\$□且 \$\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{k^}(i)=f(i)\$ 对 \$\{1,2,\cdots,n\}\$ 成立,那么满足条件的 \$f\$ 指数型生成函数为 \$\exp(\sum_{i\mid k-1}(x\cdot \exp(x))^{i}/i)\$

2025/11/29 20:41 9/16 博弈论

随机串包含给定串的期望长度

设有一串 SS_{M} 人一个空串开始,每次等概率随机往后面加一个字符,包含 SS_{M} 时停止。期望长度为 $s_{i=1}^{|S|}[1...]$ is border]]\Sigma|^{i} s_{M}

二项式反演

其它

 $\sum_{n\to\infty} {n-m}{n-m}e^n-m} 2^n-m}$

数论

连分数与佩尔方程

```
记 $<x_{0},x_{1},x_{2},x_{3},\cdots> = x_{0}+\frac{1}{x_{1}+\frac{1}{x_{2}+\frac{1}{x_{3}+\cdots}}}$ □其中 $x_{i}>0(i\ge1)$ □称 $\frac{p_{n}}{q_n}=<x_{0},x_{1},\cdots,x_{n}>$ 为它的第 $n$ 个渐近分数。补充定义 $p_{-1}=1,q_{-1}=0$ □则有递推式 $p_{n}=x_{n}p_{n-1}+p_{n-2},q_{n}=x_{n}q_{n-1}+q_{n-2}(n\ge1)$ □对无限简单连分数,我们称 $\xi_{n}=<x_{n},x_{n+1},\cdots>$ 为它的第 $n$ 个完全商,满足 $\xi_{0}=\frac{p_{n}\xi_{n+1}+p_{n-1}}{q_{n}\xi_{n+1}+q_{n-1}}$□一个实数是二次根式当且仅 当它是循环简单连分数,我们用 $<x_{0},\cdots,x_{m_{0}-1},<\overline{x_{m_{0}},\cdots,x_{m_{0}+l-1}}>>$ □其中 $l$ 是 $\xi_{0}$ 的周期。设 $\xi_{0}=\frac{\sqrt{d}+c_{0}}{r_{n}}$ □ $r_{n+1}=r_{n-1}+\frac{c_{n}^{2}-c_{n}^{2}-c_{n+1}^{2}}{r_{n}}=r_{n-1}+(c_{n}-c_{n+1})x_{n}$,$c_{n+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+1}=x_{n}r_{n}-c_{n}-c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+c_{n}+
```

我们给出两个不定方程[]\$x-dy^{2}=1\$ 和 \$x-dy^{2}=-1\$[]若 \$d\$ 为完全平方数,则第一个方程只有解 \$(\pm1,0)\$[]第二个方程无解。若 \$d\$ 不为完全平方数,设 \$\xi_{0}=\sqrt{d}\$[]设它的循环连分数周期 为 \$|\$[]渐近分数为 \$\frac{p_{n}}{q_n}}\$[则:

- 当 \$I\$ 为偶数时,第一个方程的全体正解为 \$x=p_{jl-1},y=q_{jl-1},j=1,2,3,\cdots\$□第二个方程无解
- 当 \$|\$ 为奇数时,第一个方程的全体正解为 \$x=p_{j|-1},y=q_{j|-1},j=2,4,6,\cdots\$□第二个方程的全体正解为 \$x=p {j|-1},y=q {j|-1},j=1,3,5,\cdots\$

还有另一种更加简单的表示方法:

 当\$I\$为奇数时,第一个方程的全体正解为\$x+y\sqrt{d}=\pm(p_{I-1}\pm q_{I-1}\sqrt{d})^{j},j=0,2,4,\cdots\$\[]第二个方程的全体正解为\$x+y\sqrt{d}=\pm(p_{I-1}\pm q_{I-1}\sqrt{d})^{j},j=1,3,5,\cdots\$

设有一佩尔方程 $x^{2}-ny^{2}=k$ 用 Brahmagupta's identity 求解 $(a^{2}+nb^{2})(c^{2}+nd^{2})=(ac-nbd)^{2}+n(ad+bc)^{2}=(ac+nbd)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2}+n(ad+bc)^{2$

设 (x_{1},y_{1}) 是 $x^{2}-ny^{2}=k$ 的最小解 (x_{2},y_{2}) 是 $x^{2}-ny^{2}=1$ 的解,那么 $(x_{1}^{2}-ny_{1}^{2})(x_{2}^{2}-ny_{2})=(x_{1}x_{2}+ny_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2})^{2}=(x_{1}x_{2}-ny_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2})^{2}=(x_{1}x_{2}-ny_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2})^{2}-n(x_{1}y_{2})^{2}=(x_{1}x_{2}+ny_{1}y_{2})^{2}+x_{2}y_{1})$ 和 $(x_{1}x_{2}-ny_{1}y_{2},x_{1}y_{2})$ 都是原方程的解。

对于 \$ax^{2}-by^{2}=c\$ 型的佩尔方程,改写成 \$(ax)^{2}-aby^{2}=ac\$ 的形式就可以了。

指数循环节

对 \$\forall a, b, n \in N^{+}, b \ge \phi(n)\$□有 \$a ^ {b} \equiv a ^ {b \% \phi(n) + \phi(n)}\pmod{n}\$□注意 \$b \ge \phi(n)\$ 是必要条件,以及式子中取模后指数必须加上 \$\phi(n)\$□否则结果可能会出错。

威尔逊定理

类欧几里得算法

设 $f(a,b,c,n,t_{1},t_{2})=\sum_{i=0}^{n}i^{t_{1}}\langle f(a,b,c,n,t_{1},t_{2})=\sum_{i=0}^{n}i^{t_{1}}\langle f(a,b,c,n,t_{1},$

定义 \$m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor\$\[\$g_{t}(x)=(x+1)^{t}-x^{t}=\sum_{i=0}^{t-1}g_{ti}x^{i}\$\[\$h_{t}(x)=\sum_{i=1}^{x}i^{t}=\sum_{i=0}^{t+1}h_{ti}x^{i}\$\]

• 若 \$t {2}=0\$□有:

\$\$ 原式=h {t {1}}(n)+[t {1}=0]\$\$

• 若 \$m=0\$□有:

\$\$原式=0\$\$

• 若 \$a=0\$□有:

2025/11/29 20:41 11/16 博弈论

\$\$ 原式=\lfloor\frac{b}{c}\rfloor^{t_{2}}(h_{t_{1}}(n)+[t_{1}=0]) \$\$

• 若 \$a\ge c\$ 或 \$b\ge c\$□有:

\$\$ 原式=\sum_{u_{1}+u_{2}+u_{3}=t_{2}}{t_{2}\choose u_{1},u_{2},u_{3}}(\floor\frac{a}{c}\floor)^{u_{2}}(\floor\frac{b}{c}\floor)^{u_{3}}f(a\%c,b\%c,c,n,t_{1}+u_{2},u_{1}) \$\$

• 若 \$0\le a,b<c\$□有:

\$\$ 原式=m^{t_{2}}h_{t_{1}}(n)-\sum_{u=0}^{t_{2}-1}\sum_{v=0}^{t_{1}+1}g_{t_{2}u}h_{t_{1}v}f(c,c-b-1,a,m-1,u,v) \$\$

特别地,若\$t_{1}=0,t_{2}=1\$□则有:

• 若 \$m=0\$□有:

\$\$原式=0\$\$

• 若 \$a=0\$□有:

\$\$ 原式=\lfloor\frac{b}{c}\rfloor(n+1) \$\$

• 若 \$a\ge c\$ 或 \$b\ge c\$□有:

\$\$原式=\frac{n(n+1)}{2}\lfloor\frac{a}{c}\rfloor+(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+f(a\%c,b\%c,c,n) \$\$

• 若 \$0\le a,b<c\$□有:

\$\$ 原式=nm-f(c,c-b-1,a,m-1) \$\$

证明

莫比乌斯反演

 $f_{n}=\sum_{d\in n} d\mathbb{g}_{d}\$

若 \$t\$ 为完全积性函数,且 \$t(1)=1\$□那么

 $f_{n}=\sum_{i=1}^{n}t(i)g_{\left(i\right)}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname{c}_{i}\operatorname$

其他

 $$x^{2}+y^{2}=t$$ 的整数解的个数为 \$4(\sigma_{1}(t)-\sigma_{3}(t))\$\[]其中 \$\sigma_{1}(t)\$ 表示 \$t\$ 的约数中模 \$4\$ 余 \$1\$ 的个数[\$\sigma_{3}(t)\$ 表示 \$t\$ 的约数中模 \$4\$ 余 \$3\$ 的个数。这一结论等价于,若 \$t\$ 中某 \$4k+3\$ 型的质数 \$p\$ 有奇数个,则无解。否则,答案为所有 \$4k+1\$ 型质数的积的约数个数乘 \$4\$。

设有 \$m\$ 个正整数 \$c {1},c {2},\cdots,c {m}\$□且严格递增。所有大于等于 \$c {m-1}c {m}\$□且能被

线性代数

矩阵的秩等于它最大的非零子式的阶数。对称矩阵的秩等于它最大的非零主子式的阶数(即选取同样的行和列)。对称矩阵情况下的证明,好难找啊。。

抽象代数

有限群中元素的幂

设 \$G\$ 为一有限群。令 \$|G|=n\$□对于 \$G\$ 的每个元素 \$a\$ 有 \$a^{n}=e\$ □

计算几何

球面几何

设球冠的高为 \$h\$□半径为 \$R\$□则表面积为 \$2\pi Rh\$□

球面三角形的面积为 \$(A+B+C-\pi)R^{2}\$ [

球面正弦定理[]\$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}\$

球面余弦定理□\$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\$, \$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\$

皮克定理

设有一格点多边形,其面积 $S=a+\frac{b}{2}-1$ 其中 a 表示多边形内部的整点数 b 表示多边形边界上的整点数。

直线反演

将 y=kx+b\$ 反演到 (-k,b)\$ [将 (k,b)\$ 反演到 y=-kx+b\$]这样,两点共线反演为两条直线交于一点,该点是原直线反演出的点。

笛卡尔定理

假设有四个两两相切的圆,设第 \$i\$ 个的曲率为 $$k_{i}=\pm\frac{1}{r_{i}}$=\sillass$ 当该圆与其它圆相外切时,

2025/11/29 20:41 13/16 博弈论

其它

简单多边形中的抛物线长度可以用有向线段来计算。

极角排序后扫描线可以分成上下两个半平面后归并。

有理坐标正多边形只有正方形一种。

三角形的垂心、外心、重心和九点圆圆心共线,其中九点圆圆心到垂心和外心的距离相等,而且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半。

图论

其它

- 一个森林内部节点的度数平方和等于 2*(长度为 2 的路径数+长度为 3 的路径数)。
- 一个 \$n\times m\$ 的四连通网格图的生成树数量为 \$\prod {i=1}^{m-1}\prod {j=1}^{n-1}(4\sin^2(\pi i/2m)+4\sin^2(\pi j/2n))\$

概率论

一维随机游走

在 \$[0,n]\$ 上随机游走,从 \$x\$ 出发,每次等概率移动 \$\pm 1\$□走到 \$0\$ 的期望步数是 \$x(2n-x)\$□

其它

拉格朗日插值法

对某个多项式函数,已知有给定的 k+1\$ 个取值点[] $x_{0},y_{0},cdots,(x_{k},y_{k})$ \$ [则有 $x_{i}=0$ ^{k}y_{i}|_{i}(x)\$ [其中每个 $x_{i}=0$ } 为拉格朗日基本多项式,其表达式为 $x_{i}=0$ \$ [$x_{i}=0$ \$] $x_{i}=0$ \$ [$x_{i}=0$ \$] $x_{i}=0$ \$ [$x_{i}=0$ \$] $x_{i}=0$ \$] $x_{i}=0$ \$ [$x_{i}=0$ \$] x_{i}

牛顿迭代法

 $x_{n+1}=x_n}-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Stern-Brocut tree

'设有一棵无限的区间树 , 根结点所表示的区间为\$[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}]\$ □设父结点所表示的区间为 \$[\frac{a}{b},\frac{c}{d}]\$ | 则它的左右孩子分别表示 \$[\frac{a}{b},\frac{a+c}{b+d}]\$ 和 \$[\frac{a+c}{b+d},\frac{c}{d}]\$ □这棵树不重不漏地表示了所有正的既约的有理数。

Tree of primitive Pythagorean triples

设有一棵无限的满三叉树,根结点表示列向量 \$(3,4,5)^{T}\$ □设有三个矩阵 \$\$ A=\begin{pmatrix}

 $$$ B=\left(\frac{pmatrix} 1\&2\&2\ 2\&1\&2\ 2\&2\&3\ \end{pmatrix} $$$

 $S C=\left[\frac{2}{2} -2\&1\&2\right] -2\&2\&3\right]$

设父结点的向量为 \$\alpha\$||则它从左到右的三个孩子的向量分别为 \$A\alpha, B\alpha, C\alpha\$||这棵树 不重不漏地枚举完了所有基本毕达哥拉斯三元组□\$a^{2}+b^{2}=c^{2}\$□□

最大反链

给定一个非负整数数列 \$\{t {i}\}\$||定义偏序集 \$S=\prod {i=1}^{n}\{x|0\le x\le 那么 \$S\$ 的最大反链的大小等于关于 \$x {i}\$ 的不定方程 $\star = 1$ ^{n}x_{i}=\lfloor, frac{\sum_{i=1}^{n}t_{i}}{2}\rfloor} 满足 \$\forall 1\le i\le n, 0\le x {i}\le t {i}\$ 的整数解的个数。证明

矩阵乘法

设 \$\oplus,\otimes\$ 为二元运算,且 \$\oplus\$ 满足交换律和结合律□\$\otimes\$ 满足结合律□\$\otimes\$ 对 \$\oplus\$ 满足分配律。定义新的矩阵乘法 \$A {n,m}\times B {m,p}=C {n,p}\$□其中 \$c {i,j}=\bigoplus {k=1}^{m}a {i,k}\otimes b {k,j}\$□那么这种矩阵乘法满足结合律。除了通常的 \$\oplus\$ 代表加法和 \$\otimes\$ 代表乘法外□\$\oplus\$ 代表取最大/最小值□\$\otimes\$ 代表加法;在 \$[0,+\infty)\$ 上定义 \$\oplus\$ 代表取最大/最小值□\$\otimes\$ 代表乘法,都满足条件。其中后两者对一些 求最优值的 dp 优化有一定的作用。证明

2025/11/29 20:41 15/16 博弈论

gcc内建二进制函数

- builtin popcount(x)表示 \$x\$ 二进制中 \$1\$ 的个数。
- __builtin_parity(x) 表示 \$x\$ 二进制中 \$1\$ 的个数的奇偶性。
- __builtin_clz(x) 表示 \$x\$ 二进制中前导 \$0\$ 的个数。
- __builtin_ctz(x) 表示 \$x\$ 二进制中结尾 \$0\$ 的个数。
- __builtin_ffs(x) 表示 \$x\$ 二进制中右起第一个 \$1\$ 的位置。

以上函数传入的参数为 unsigned int , 如需对 unsigned long long 使用 , 需要在函数名的最后加上 ll , 如 __builtin_popcountll __builtin_clz(x) 和 __builtin_ctz(x) 两者在 \$x=0\$ 时未定义

一类关于集合的计数问题

设有两个集合 \$A,B\subset\mathbb{N}\$□且 \$0\in A,1\in B,|A|=n,|B|=m\$□定义 \$A+B=\{x+y|x\in A,y\in B\}\$□若 \$A+B=[1,nm]\cap\mathbb{N}^{+}\$□则称 \$(A,B)\$ 是好的。问这样的集合对有多少个。

这一问题的答案为:

 $\$ \begin{cases} &1&(n=1)\\ &f(n,m)+f(m,n)&(n>1)\ m>1) \end{cases} \$\$

其中 \$f(n,m)=\sum_{i=1}^{+\infty}g_{i}(n)(g_{i}(m)+g_{i+1}(m))\$□\$g_{i}(n)\$ 表示将 \$n\$ 分解成\$i\$ 个大于 \$1\$ 的数的乘积的方案数(有序)。证明

加法链

高斯数值积分

求一个 [-1,1]\$ 上的积分,可以使用高斯积分。它近似等于 $s=1}^{n}$ s=1 s=1

\$n\$	\$x_{i}\$	\$w_{i}\$
\$1\$	\$0\$	\$2\$
\$2\$	\$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\$	\$1\$
\$3\$	\$0\$	\$\frac{8}{9}\$
	\$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\$	\$\frac{5}{9}\$
\$4\$	\$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}\$	\$\frac{18+\sqrt{30}}{36}\$
	$\scriptstyle \$ \pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}\\$	\$\frac{18-\sqrt{30}}{36}\$
\$5\$	\$0\$	\$\frac{128}{225}\$

update: 2021/02/21 2020-2021:teams:intrepidsword:zhongzihao:conclusion https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidsword:zhongzihao:conclusion&rev=1613910052 20:20

\$n\$	\$x_{i}\$	\$w_{i}\$
	\$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}\$	\$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}\$
	\$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}\$	\$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}\$

若积分区间不是 \$[-1,1]\$, 那么需要变换积分区间[]\$\int_{a}^{b}f(x)\mathbb{d}x=\frac{b $a\} \{2\} \int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}) \mathbb{d}x$

https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Permanent link:



