

部分链接尚未搬运~

博弈论

威佐夫游戏

有两堆石子，两人轮流取，每次可以从一堆中取若干颗石子，也可以从两堆中取一样多的石子。负态为 $\lfloor k \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor, k + \lfloor k \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

翻硬币游戏

翻硬币游戏是指这样的一种组合游戏：有 n 枚硬币排成一排，开始时它们有的正面朝上，有的反面朝上，两名玩家轮流按照一定的规则，翻转一些硬币，最后不能操作者输。这里的规则必须满足以下两点：

- 最右边的硬币必须是从正面翻转到反面（为了保证游戏结束）
- 规则允许的翻转位置集合唯一取决于最右侧硬币的位置，而与之前的操作、玩家等无关（为保证这是一个平等博弈）

翻硬币游戏有这样一个结论：一个局面的 sg 值等于所有正面硬币的 sg 值的异或，以 H 表示正，T 表示反，例如 $sg(\text{THHTTH}) = sg(\text{TH}) \oplus sg(\text{TTH}) \oplus sg(\text{TTTTTH})$

Nim 积

$a \otimes b = \text{mex}\{a \otimes b \oplus a \otimes b' \mid 0 \leq b' < b\}$ 满足交换律，结合律，对 nim 和（异或）满足分配律。全体非负整数在 nim 和和 nim 积下成一域 [Tartan Games]（即二维硬币游戏）的 sg 值是对应行列的 nim 积。

nim 积还具有如下的性质：

- $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$ $x \otimes y = 0$ 当且仅当 $x = 0 \vee y = 0$
- $1 \otimes x = x \otimes 1 = x$
- 对全体自然数 $n \in [0, 2^{2^n} - 1]$ 中的自然数在 nim 和和 nim 积下成一域
- 对全体自然数 $n \in [2^{2^n} \otimes x = 2^{2^n} \times x \mid 0 \leq x < 2^{2^n}]$
- 对全体自然数 $n \in [2^{2^n} \otimes 2^{2^n} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2^n} = 2^{2^n} \oplus 2^{2^n - 1}]$

surreal number

surreal number 是一个包含无穷小、无穷大和实数的域，用它可以十分方便地研究一些不平等博弈问题 surreal number 定义为一个集合对 $\{L|R\}$ 其中 L 中的每个元素小于 R 中的每个元素。我们称 $x \leq y$ 当且仅当不存在 $x_L \in X_L$ 使得 $y \leq x_L$ 且不存在 $y_R \in Y_R$ 使得 $y_R \leq x$ surreal number 有如下的一些性质：

- 对于一个 surreal number $x = \{L|R\}$ x 大于 L 中的任意一个元素，小于 R 中的任意

一个元素。

- 对于一个 $surreal\;number$ $x = \{L|R\}$ 若 L 有最大值 l_{\max} 则 $x = \{l_{\max}|R\}$ 对于 R 同理。
- 设 a 到 b 之间最早出生的 $surreal\;number$ 在第 i 天出生，那么在 a 到 b 之间且在第 i 天出生的 $surreal\;number$ 有且只有一个。
- 若 $a < x < b$ 且 x 是 a 和 b 之间最早出生的 $surreal\;number$ 则 $x = \{a|b\}$

$surreal\;number$ 的加法法则为

$$x+y = \{X_L|X_R\} + \{Y_L|Y_R\} = \{X_L+y, x+Y_L|X_R+y, x+Y_R\}$$

$surreal\;number$ 的取反法则为 $-x = -\{X_L|X_R\} = \{-X_R|-X_L\}$

$surreal\;number$ 的乘法法则为 $xy = \{X_L|X_R\} \{Y_L|Y_R\} = \{X_Ly+xY_L-X_LY_L, X_Ry+xY_R-X_RY_R|X_Ly+xY_L-X_LY_L, X_Ry+xY_R-X_RY_R\}$

$surreal\;number$ 的取逆法则为 $\frac{1}{y} = \{0, \frac{1+(y^R-y)}{(y^L)^L}\} \{y^R\}, \frac{1+(y^L-y)}{(y^L)^R}\} \{y^L\} | \frac{1+(y^L-y)}{(y^L)^L}\} \{y^L\}, \frac{1+(y^R-y)}{(y^R)^L}\} \{y^R\}\}$ 其中 $y^L > 0, y^R > 0$

设有一组合游戏处于局面 P 玩家 L 可以转移到的状态为 P^L 玩家 R 可以转移到的状态为 P^R 我们记 $P = \{P^L|P^R\}$ 那么：

- 若 $P > 0$ 则不论先手还是后手 L 获胜
- 若 $P < 0$ 则不论先手还是后手 R 获胜
- 若 $P = 0$ 则后手获胜

类似于 Nim 和游戏，若有 n 个不平等游戏 P_1, \dots, P_n 它们分别对应的 $surreal\;number$ 为 x_1, \dots, x_n 则 $P_1 + \dots + P_n$ 对应的 $surreal\;number$ 为 $x_1 + \dots + x_n$

最后给出一些无穷大和无穷小的 $surreal\;number$

$$\begin{aligned} & \{0|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\} = \epsilon \text{ (无穷小)} \\ & \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \omega \text{ (无穷大)} \\ & \{0|\epsilon\} = \frac{\epsilon}{2} \quad \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\} = \omega + 1 \\ & \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\} = \omega - 1 \quad \{\omega|\omega+1\} = \omega + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

SJ 定理

对一个 Nim 游戏，如果定义使得所有子游戏的 sg 值为 0 的玩家胜利，先手必胜的条件为：

- 游戏的 sg 值为 0 且所有子游戏 sg 值均不超过 1 。
- 游戏的 sg 值不为 0 且至少一个子游戏 sg 值超过 1 。

数学分析

Wallis公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2]^{2n+1}}{2n+1}$$

Stirling公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$$

n维球

n维球的体积公式
$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n$$

n维球的表面积公

式
$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1} = V'_n(r)$$

其中伽马函数 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ 满足

- $\Gamma(1) = 1, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) (z > 0)$
- $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} (z \notin \mathbb{Z})$
- $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

KKT 条件

设有函数 $f(\mathbf{p})$ 我们要求在

$g_1(\mathbf{p}) \leq 0, \dots, g_n(\mathbf{p}) \leq 0, h_1(\mathbf{p}) = \dots = h_m(\mathbf{p}) = 0$ 的条件下求其极小值，则必要条件为：

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^n \mu_i \nabla g_i(\mathbf{p}) = 0 \\ h_i(\mathbf{p}) = 0 \\ \mu_i g_i(\mathbf{p}) = 0 \\ \mu_i \geq 0 \end{cases}$$

可以看出这是拉格朗日乘因子法的推广。如果 f 是凸函数（注意凸函数要求定义域是凸集，即 g 和 h 的限制以及 f 的定义域都要是凸集），那么 KKT 条件是充要的。

组合数学

划分数

设 $p(n)$ 为将 n 写成若干个正整数和的方案数，若 i 为自然数，称 $\frac{3i^2-i}{2}$ 和 $\frac{3i^2+i}{2}$ 为广义五边形数，并定义 $f(\frac{3i^2-i}{2}) = f(\frac{3i^2+i}{2}) = i$ 则 $p(n) = \sum_{u, 1 \leq u \leq n} (-1)^{f(u)-1} p(n-u)$ 其中 u 为广义五边形数 $\phi(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i)$ 称为欧拉函数，它是划分数生成函数的逆 $\phi(x) = \sum_u (-1)^{f(u)} x^u$ 其中 u 为广义五边形数。从 0 开始 $p(n)$ 的前若干项为 $1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77$ 。

划分数容斥

在集合 S 上定义一个等价关系，有 n 个位置可以取 S 中的值，要求两两值不同，另外还有一些别的限制。设 $M = \{1, 2, \dots, n\}$ 可以在 M 的划分上进行容斥 P 表示 P 中每个子集中的元素相等，而子集间的关系不受限制，那么 P 的容斥系数是 $\prod_{Q \in P} (-1)^{|Q|-1} (|Q|-1)!$ 特别地，如果这 n 的位置本质相同，还可以枚举划分数来做。证明

模2意义下的组合数

$\binom{n}{m} \% 2 = 1$ 当且仅当 n 在 m 为 1 的二进制位上都为 1 。易知 $\binom{n+m}{m} \% 2 = 1$ 当且仅当 n 在 m 为 1 的二进制位上都为 0 。

默慈金数

设 M_n 表示在一个圆上的 n 个不同点间，画出彼此不相交的弦的全部方法的总数 $M_0 = M_1 = 1, M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-i-1} = \frac{2n+3}{n+3} M_n + \frac{3n}{n+3} M_{n-1}$ 它也可以表示数列 $\{a_i\} (0 \leq i \leq n)$ 的数量，满足 $a_0 = a_n = 0, a_i \geq 0, |a_i - a_{i+1}| \leq 1$ 从 0 开始 M_n 的前若干项为 $\begin{aligned} &1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, \\ &5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, \\ &2356779, 6536382, 18199284, 50852019, 142547559, \\ &400763223, 1129760415, 3192727797, 9043402501, \\ &25669818476, 73007772802, 208023278209, 593742784829 \end{aligned}$

卡特兰数

设 $C_0 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$ 它满足 $C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$ 它可以表示：

- n 对括号组成的合法的表达式种数
- n 个结点不同构二叉树的方案数
- $n \times n$ 格点中不越过对角线的单调路径的个数。单调路径是指从左下角走到右上角，每步向右或向上。

- 通过连接顶点将 $n+2$ 条边的凸多边形分成三角形的方案数
- 以 $\{1, 2, \dots, n\}$ 为进栈序列的合法出栈序列个数
- 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的不交叉划分的个数
- 用 n 个长方形填充一个高度为 n 的阶梯状图形的方法个数

从 0 开始 C_n 的前若干项为 $\begin{aligned} &1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \\ &4862, 16796, 58786, 208012, 742900, \\ &2674440, 9694845, 35357670, 129644790, \\ &477638700, 1767263190 \end{aligned}$

伯努利数

$B_0 = 1, B_i = -\sum_{j=0}^{i-1} C_i^j B_j$. 伯努利数的指数型母函数是 $\frac{x}{e^x - 1}$. 伯努利数可用于计算等幂和 $\sum_{k=1}^n k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}$. 从 0 开始 B_n 的前若干项为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}$

上升阶乘幂和下降阶乘幂

$(x)^{(n)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$ 称为上升阶乘幂 $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ 称为下降阶乘幂。满足：

- $(a+b)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (a)^{(n-i)} (b)^{(i)}$
- $(a+b)_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (a)_{n-i} (b)_i$
- $(x)_m (x)_n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{m-k} k! (x)_{m+n-k}$

斯特林数

第一类斯特林数

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 表示 n 个元素的置换中能被分解为 k 个循环的置换个数，并定义 $s(n, k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} k > 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \begin{bmatrix} n > 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ 该数列满足：

- $(x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$
- $(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k$

也就是说，对于一个固定的 $n, (x)^{(n)}$ 和 $(x)_n$ 分别是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 和 $s(n, k)$ 的生成函数。

对于一个固定的 $k, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的指数型生成函数为 $\frac{(\ln x)^k}{k!} e^x$
 $x^k = \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!}$

另外还有：

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{m-k}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{n!}{k!}$
- $\sum_{k=0}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{k} (n+k) \binom{n+k}{k}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{l+m}{n-k} = \binom{l+m}{n}$

第二类斯特林数

$\binom{n}{k}$ 表示有 n 个元素的集合划分为 k 个集合的方案数
 $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ ($k > 0$)
 $\binom{0}{0} = 1$
 $\binom{n}{0} = \binom{0}{n} = 0$ ($n > 0$) 该数列满足：

- $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (-1)^i \binom{k-i}{n} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k-i}{n}$

容易注意到这是一个卷积形式，可以 $\mathcal{O}(n \log n)$ 地求出一个 n 对应的所有第二类斯特林数

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k = x^n$
- $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ 其中 B_n 是贝尔数

对于一个固定的 k 的生成函数为

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{\prod_{i=1}^k (1-kx)}$$
 其指数型生成函数为

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

贝尔数

设 B_n 表示基数为 n 的集合的划分方法数，则 B_n 满足
 $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$
 $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ 其中 S 是第二类斯特林数，对任意质数 p 有 $B_{n+p} \equiv m B_n + B_{n+1} \pmod{p}$ 其指数型母函数是 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$ 从 0 开始 B_n 的前若干项为

$\begin{aligned} &1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, \\ &4140, 21147, 115975, 678570, \\ &4213597, 27644437, 190899322, \\ &1382958545, 10480142147, 82864869804, \\ &682076806159, 5832742205057, 51724158235372, \\ &474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346, \\ &445958869294805289, 463859033229999353, 49631246523618756274 \end{aligned}$

Burnside 引理

设 G 是一个有限群，作用于集合 X 上，对 $\forall g \in G$ $|X^g|$ 表示 X 中在 g 作用下的不动元素的集合 $|X/G|$ 表示 X 在 G 作用下的轨道数，则有 $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$

Polya 定理

设 \bar{G} 是 n 个对象的一个置换群，用 m 种颜色涂染这 n 个对象，则不同染色的方案数为 $| = \frac{1}{|\bar{G}|} (m^{c(\bar{a}_1)} + m^{c(\bar{a}_2)} + \dots + m^{c(\bar{a}_g)})$ 其中 $c(\bar{a}_i)$ 表示置换 \bar{a}_i 的循环节数。

切比雪夫多项式

第一类切比雪夫多项式为 $T_n(\cos x) = \cos nx$ 满足 $\frac{d}{dx} T_n(x) = n U_{n-1}(x)$ 第二类切比雪夫多项式为 $U_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$ 满足 $\frac{d}{dx} U_n(x) = n T_n(x)$

杨式矩阵和钩子公式

杨式矩阵是指满足以下两个条件的矩阵：

- 如果格子 (i,j) 没有元素，则它右边和上边的相邻格子也一定没有元素。
- 如果格子 (i,j) 有元素 $a_{i,j}$ 则它右边和上边的相邻格子要么没有元素，要么有元素且比 $a_{i,j}$ 大。

$1 \sim n$ 所组成杨氏矩阵的个数可以通过下面的递推式得到：

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + (n-1)F_{n-2}$$

钩子公式是指：对于给定形状，不同的杨氏矩阵的个数为 $n!$ 除以每个格子的钩子长度加 1 的积。其中钩子长度定义为该格子右边的格子数和它上边的格子数之和。

全错排

$1 \sim n$ 的全错排数量为 $n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}$

可拆分排列

排列的直和是指将两个排列拼起来，将右边的排列平移；排列的斜和是指将两个排列拼起来，将左边的排列平移。例如 $1,2$ 和 $1,2,3$ 的直和为 $1,2,3,4,5$ ，斜和为 $4,5,1,2,3$ 。定义可拆分排列为可以由 1 这一种

排列经过若干次斜和和直和的运算得到的排列。

大 Schröder 数

设 S_n 表示从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 每次只能向右、向上、向右上走一步，且不能跨过 $(0,0)$ 到 (n,n) 的对角线的不同走法数量。那么有

$S_0=1, S_1=2, S_n=3S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}S_kS_{n-k-1}$ S_n 的生成函数是 $\frac{1-x-\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}$ $S_n=\sum_{i=0}^n\frac{1}{n-i+1}\frac{(2n-i)!}{i!(n-i)!^2}$

S_n 还可以表示长度为 $n+1$ 的可拆分排列的数量。

从 0 开始 S_n 的前若干项为 $\begin{aligned} &1, 2, 6, 22, 90, 394, \\ &1806, 8558, 41586, 206098, \\ &1037718, 5293446, 27297738, \\ &142078746, 745387038, 3937603038, \\ &20927156706, 111818026018, 600318853926, \\ &3236724317174, 17518619320890, 95149655201962, \\ &518431875418926, 2832923350929742, 15521467648875090 \end{aligned}$

小 Schröder 数

设 $s_0=1, s_{i+1}=\frac{S_i}{2}$ 那么 $s_n=\frac{1}{n}((6n-9)s_{n-1}-(n-3)s_{n-2})$ s_n 可以表示：

- 将 $n+1$ 边形剖分的方案数
- 给 n 个数加括号的方案数

库默尔定理

设 p 为质数 a, b 在 p 进制下的表示分别为 $\overline{\cdots a_n \cdots a_0}$ 和 $\overline{\cdots b_n \cdots b_0}$ 那么 $\binom{a}{b}$ 中含有质因子 p 的个数为满足 $\overline{\cdots a_i \cdots a_0} < \overline{\cdots b_i \cdots b_0}$ 的下标 i 的个数。特别的，当 $a < b$ 时， $\binom{a}{b} = 0$ 而满足条件的 i 也有无穷多个。从另一种角度来说，也可以理解成 b 和 $a-b$ 在做 p 进制加法时产生进位的次数。这可以得到一个显然的推论 $\binom{a}{b}$ 中 p 的个数不超过 $\log_p a$

不动函数的数量

设 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^k(i) = f(i)$ 对 $\{1, 2, \dots, n\}$ 成立，那么满足条件的 f 指数型生成函数为 $\exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \exp(x)^k)$

随机串包含给定串的期望长度

设有一串 S 从一个空串开始，每次等概率随机往后面加一个字符，包含 S 时停止。期望长度为 $\sum_{i=1}^{|S|} \frac{1}{|S|}$ [证明](#)

二项式反演

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

$$g_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{j-i} \binom{i}{j} f_j$$

其它

$$\sum_{k \geq 2m} \binom{n}{k} \binom{k}{2m} = \frac{n!}{(n-2m)!} 2^{n-2m-1}$$

数论

连分数与佩尔方程

记 $\langle x_0, x_1, x_2, x_3, \dots \rangle = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \dots}}}$ 其中 $x_i > 0$ 称 $\frac{p_n}{q_n} = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ 为它的第 n 个渐近分数。补充定义 $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ 则有递推式 $p_n = x_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2}$ 对无限简单连分数，我们称 $\langle x_n, x_{n+1}, \dots \rangle$ 为它的第 n 个完全商，满足 $\langle x_n, x_{n+1}, \dots \rangle = \frac{p_{n+1} \langle x_n, x_{n+1}, \dots \rangle + p_n}{q_{n+1} \langle x_n, x_{n+1}, \dots \rangle + q_n}$ 一个实数是二次根式当且仅当它是循环简单连分数，我们用 $\langle x_0, \dots, x_{m-1}, \overline{x_m, \dots, x_{m+l-1}} \rangle$ 其中 l 是 $\langle x_m, \dots, x_{m+l-1} \rangle$ 的周期。设 $\langle x_m, \dots, x_{m+l-1} \rangle = \frac{\sqrt{d} + c_0}{r_0}, q_0 | d - c_0^2$ 我们有 $\langle x_m, \dots, x_{m+l-1} \rangle = \frac{\sqrt{d} + c_n}{r_n}$ 其中 $r_{n+1} = r_n + \frac{c_n^2 - c_{n+1}^2}{r_n} = r_n + (c_n - c_{n+1})x_n, c_{n+1} = x_n r_n - c_n, a_n = \lfloor \langle x_m, \dots, x_{m+l-1} \rangle \rfloor$

我们给出两个不定方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 和 $x^2 - dy^2 = -1$ 若 d 为完全平方数，则第一个方程只有解 $(\pm 1, 0)$ 第二个方程无解。若 d 不为完全平方数，设 $\langle x_0, x_1, \dots \rangle = \frac{\sqrt{d} + c_0}{r_0}$ 设它的循环连分数周期为 l 渐近分数为 $\frac{p_n}{q_n}$ 则：

- 当 l 为偶数时，第一个方程的全体正解为 $x = p_{jl-1}, y = q_{jl-1}, j = 1, 2, 3, \dots$ 第二个方程无解
- 当 l 为奇数时，第一个方程的全体正解为 $x = p_{jl-1}, y = q_{jl-1}, j = 2, 4, 6, \dots$ 第二个方程的全体正解为 $x = p_{jl-1}, y = q_{jl-1}, j = 1, 3, 5, \dots$

还有另一种更加简单的表示方法：

- 当 d 为偶数时，第一个方程的全体解为 $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{l-1}\pm q_{l-1}\sqrt{d})^j, j=0,1,2,\dots$ 第二个方程无解
- 当 d 为奇数时，第一个方程的全体正解为 $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{l-1}\pm q_{l-1}\sqrt{d})^j, j=0,2,4,\dots$ 第二个方程的全体正解为 $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{l-1}\pm q_{l-1}\sqrt{d})^j, j=1,3,5,\dots$

设有一佩尔方程 $x^2-ny^2=k$ 利用 Brahmagupta's identity 求

解 $(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac-nbd)^2+n(ad+bc)^2=(ac+nbd)^2+n(ad-bc)^2$

设 (x_1, y_1) 是 $x^2-ny^2=k$ 的最小解 (x_2, y_2) 是 $x^2-ny^2=1$ 的解，那么 $(x_1^2-ny_1^2)(x_2^2-ny_2^2)=(x_1x_2+ny_1y_2)^2-n(x_1y_2-x_2y_1)^2=k$ 从而 $(x_1x_2+ny_1y_2, x_1y_2-x_2y_1)$ 和 $(x_1x_2-ny_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$ 都是原方程的解。

对于 $ax^2-by^2=c$ 型的佩尔方程，改写成 $(ax)^2-aby^2=ac$ 的形式就可以了。

指数循环节

对 $\forall a, b, n \in \mathbb{N}^+, b \geq \phi(n)$ 有 $a^b \equiv a^{b \% \phi(n) + \phi(n)} \pmod{n}$
注意 $b \geq \phi(n)$ 是必要条件，以及式子中取模后指数必须加上 $\phi(n)$ 否则结果可能会出错。

威尔逊定理

$$\prod_{i=1, \gcd(i,m)=1}^m i \equiv \begin{cases} -1 & (m=1,2,4,p^l,2p^l, \text{p is odd prime}) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \pmod{m}$$

类欧几里得算法

设 $f(a,b,c,n,t_1,t_2)=\sum_{i=0}^n i^{t_1} \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor^{t_2}$ 求解这一函数值的算法称为类欧几里得算法。这里仅讨论 6 个参数均为非负整数的情况，且定义 $0^0=1$ ：

定义 $m=\lfloor \frac{an+b}{c} \rfloor$ $g_t(x)=(x+1)^t-x^t=\sum_{i=0}^{t-1} g_{ti}x^i$ $h_t(x)=\sum_{i=1}^x i^t=\sum_{i=0}^{t+1} h_{ti}x^i$

- 若 $t_2=0$ 有：

$$\text{原式} = h_{t_1}(n) + [t_1=0]$$

- 若 $m=0$ 有：

$$\text{原式} = 0$$

- 若 $a=0$ 有：

$$f(n) = \lfloor \frac{b}{c} \rfloor^{h_{t_1}(n)} + [t_1=0]$$

- 若 $a \geq c$ 或 $b \geq c$ 有：

$$f(n) = \sum_{u_1+u_2+u_3=t_2} \binom{t_2}{u_1, u_2, u_3} \lfloor \frac{a}{c} \rfloor^{u_2} \lfloor \frac{b}{c} \rfloor^{u_3} f(a\%c, b\%c, n, t_1+u_2, u_1)$$

- 若 $0 \leq a, b < c$ 有：

$$f(n) = m^{h_{t_1}(n)} - \sum_{u=0}^{t_2-1} \sum_{v=0}^{t_1+1} g_{t_2, u} h_{t_1, v} f(c, c-b-1, a, m-1, u, v)$$

特别地，若 $t_1=0, t_2=1$ 则有：

- 若 $m=0$ 有：

$$f(n) = 0$$

- 若 $a=0$ 有：

$$f(n) = \lfloor \frac{b}{c} \rfloor^{n+1}$$

- 若 $a \geq c$ 或 $b \geq c$ 有：

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2} \lfloor \frac{a}{c} \rfloor + (n+1) \lfloor \frac{b}{c} \rfloor + f(a\%c, b\%c, n)$$

- 若 $0 \leq a, b < c$ 有：

$$f(n) = nm - f(c, c-b-1, a, m-1)$$

证明

莫比乌斯反演

$$f_n = \sum_{d|n} g_d \iff g_n = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f_{\frac{n}{d}}$$

$$f_n = \sum_{n|d} g_d \iff g_n = \sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n}) f_{\frac{d}{n}}$$

若 t 为完全积性函数，且 $t(1)=1$ 那么

$$f_n = \sum_{i=1}^n t(i) g_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \iff g_n = \sum_{i=1}^n \mu(i) t(i) f_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor}$$

其他

$x^2+y^2=t$ 的整数解的个数为 $4(\sigma_1(t)-\sigma_3(t))$ 其中 $\sigma_1(t)$ 表示 t 的约数中模 4 余 1 的个数 $\sigma_3(t)$ 表示 t 的约数中模 4 余 3 的个数。这一结论等价于，若 t 中某 $4k+3$ 型的质数 p 有奇数个，则无解。否则，答案为所有 $4k+1$ 型质数的积的约数个数乘 4。

设有 m 个正整数 c_1, c_2, \dots, c_m 且严格递增。所有大于等于 $c_{m-1}c_m$ 且能被

$\gcd(c_1, c_2, \dots, c_m)$ 整除的整数可以用这 m 个数使用非负整数线性表示。 [证明](#)

线性代数

矩阵的秩等于它最大的非零子式的阶数。对称矩阵的秩等于它最大的非零主子式的阶数（即选取同样的行和列）。 [对称矩阵情况下的证明](#)，好难找啊。

抽象代数

有限群中元素的幂

设 G 为一有限群。令 $|G|=n$ 对于 G 的每个元素 a 有 $a^n=e$

计算几何

球面几何

设球冠的高为 h 半径为 R 则表面积为 $2\pi Rh$

球面三角形的面积为 $(A+B+C-\pi)R^2$

球面正弦定理 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

球面余弦定理 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

皮克定理

设有一格点多边形，其面积 $S=a+\frac{b}{2}-1$ 其中 a 表示多边形内部的整点数 b 表示多边形边界上的整点数。

直线反演

将 $y=kx+b$ 反演到 $(-k,b)$ 将 (k,b) 反演到 $y=-kx+b$ 这样，两点共线反演为两条直线交于一点，该点是原直线反演出的点。

笛卡尔定理

假设有四个两两相切的圆，设第 i 个的曲率为 $k_i = \pm \frac{1}{r_i}$ 当该圆与其它圆相外切时，

曲率为正，否则为负。那么有 $\sum_{i=1}^4 k_i^2 = (\sum_{i=1}^4 k_i)^2$ 推广到 n 维，有 $\sum_{i=1}^{n+2} k_i^2 = (\sum_{i=1}^{n+2} k_i)^2$

其它

简单多边形中的抛物线长度可以用有向线段来计算。

极角排序后扫描线可以分成上下两个半平面后归并。

有理坐标正多边形只有正方形一种。

三角形的垂心、外心、重心和九点圆圆心共线，其中九点圆圆心到垂心和外心的距离相等，而且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半。

图论

其它

一个森林内部节点的度数平方和等于 $2 \times (\text{长度为 } 2 \text{ 的路径数} + \text{长度为 } 3 \text{ 的路径数})$ 。

一个 $n \times m$ 的四连通网格图的生成树数量为

$$\prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} (4 \sin^2(\pi i/2m) + 4 \sin^2(\pi j/2n))$$

概率论

一维随机游走

在 $[0, n]$ 上随机游走，从 x 出发，每次等概率移动 ± 1 走到 0 的期望步数是 $x(2n-x)$

其它

拉格朗日插值法

对某个多项式函数，已知有给定的 $k+1$ 个取值点 $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ 则有 $L(x) = \sum_{i=0}^k y_i l_i(x)$ 其中每个 $l_i(x)$ 为拉格朗日基本多项式，其表达式为 $l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

牛顿迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Stern-Brocot tree

设有一棵无限的区间树，根结点所表示的区间为 $[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$ 设父结点所表示的区间为 $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]$ 则它的左右孩子分别表示 $[\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}]$ 和 $[\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}]$ 这棵树不重不漏地表示了所有正的既约的有理数。

Tree of primitive Pythagorean triples

设有一棵无限的满三叉树，根结点表示列向量 $(3,4,5)^T$ 设有三个矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

设父结点的向量为 α 则它从左到右的三个孩子的向量分别为 $A\alpha, B\alpha, C\alpha$ 这棵树不重不漏地枚举完了所有基本毕达哥拉斯三元组 $a^2 + b^2 = c^2$

最大反链

给定一个非负整数数列 $\{t_i\}$ 定义偏序集 $S = \prod_{i=1}^n \{x \mid 0 \leq x \leq t_i, x \in \mathbb{Z}\}$ 其中 $\vec{x} \preceq \vec{y}$ 当且仅当 $\forall i, 1 \leq i \leq n, x_i \leq y_i$ 那么 S 的最大反链的大小等于关于 $\{x_i\}$ 的不定方程
$$\sum_{i=1}^n x_i = \lfloor \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{2} \rfloor$$
 满足 $\forall i, 1 \leq i \leq n, 0 \leq x_i \leq t_i$ 的整数解的个数。证明

矩阵乘法

设 \oplus, \otimes 为二元运算，且 \oplus 满足交换律和结合律 \otimes 满足结合律 \otimes 对 \oplus 满足分配律。定义新的矩阵乘法 $A_{n,m} \times B_{m,p} = C_{n,p}$ 其中 $c_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^m a_{i,k} \otimes b_{k,j}$ 那么这种矩阵乘法满足结合律。除了通常的 \oplus 代表加法和 \otimes 代表乘法外 \oplus 代表取最大/最小值 \otimes 代表加法；在 $[0, +\infty)$ 上定义 \oplus 代表取最大/最小值 \otimes 代表乘法，都满足条件。其中后两者对一些求最优值的 dp 优化有一定的作用。证明

gcc内建二进制函数

- `__builtin_popcount(x)` 表示 x 二进制中 1 的个数。
- `__builtin_parity(x)` 表示 x 二进制中 1 的个数的奇偶性。
- `__builtin_clz(x)` 表示 x 二进制中前导 0 的个数。
- `__builtin_ctz(x)` 表示 x 二进制中结尾 0 的个数。
- `__builtin_ffs(x)` 表示 x 二进制中右起第一个 1 的位置。

以上函数传入的参数为 `unsigned int` , 如需对 `unsigned long long` 使用 , 需要在函数名的最后加上 `ll` , 如 `__builtin_popcountll` `__builtin_clz(x)` 和 `__builtin_ctz(x)` 两者在 $x=0$ 时未定义

一类关于集合的计数问题

设有两个集合 $A, B \subset \mathbb{N}$ 且 $0 \in A, 1 \in B, |A|=n, |B|=m$ 定义 $A+B = \{x+y | x \in A, y \in B\}$ 若 $A+B = [1, nm] \cap \mathbb{N}^{\{+\}}$ 则称 (A, B) 是好的。问这样的集合对有多少个。

这一问题的答案为：

$$\begin{cases} 1 & (n=1 \vee m=1) \\ f(n, m) + f(m, n) & (n > 1 \wedge m > 1) \end{cases}$$

其中 $f(n, m) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i(n)(g_i(m) + g_{i+1}(m))$ $g_i(n)$ 表示将 n 分解成 i 个大于 1 的数的乘积的方案数 (有序)。[证明](#)

加法链

对于一个正整数 n 它的一个加法链是一个序列 v_0, \dots, v_s 其中 $v_0=1, v_s=n$ 对于所有的 v_1, \dots, v_s 它们都是前面某两个数的和。一种常见的较短的加法链即为快速幂对指数的拆分方法。设 n 的二进制表示下 1 的个数为 $v(n)$ 那么使用快速幂的加法链的长度为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + v(n) - 1$ 另外, 设 n 最短的加法链长度为 $l(n)$ Knuth 猜想 $l(n) \geq \lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 v(n) \rceil$ 且这一猜想对 $v(n) \leq 8$ 已经得到证明。

高斯数值积分

求一个 $[-1, 1]$ 上的积分, 可以使用高斯积分。它近似等于 $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ 当 $f(x)$ 可以用不超过 $2n-1$ 次的多项式近似时, 此方法精度较高。下面对 $n=1 \sim 5$ 列出 w 和 f 的表。

n	x_i	w_i
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$

n	x_i	w_i
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$

若积分区间不是 $[-1, 1]$ ，那么需要变换积分区间 $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}) dx$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:conclusion&rev=1613910052>

Last update: 2021/02/21 20:20