

部分链接尚未搬运~

# 博弈论

## 威佐夫游戏

有两堆石子，两人轮流取，每次可以从一堆中取若干颗石子，也可以从两堆中取一样多的石子。负态为  $\lfloor k \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor, k + \lfloor k \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

## 翻硬币游戏

翻硬币游戏是指这样的一种组合游戏：有  $n$  枚硬币排成一排，开始时它们有的正面朝上，有的反面朝上，两名玩家轮流按照一定的规则，翻转一些硬币，最后不能操作者输。这里的规则必须满足以下两点：

- 最右边的硬币必须是从正面翻转到反面（为了保证游戏结束）
- 规则允许的翻转位置集合唯一取决于最右侧硬币的位置，而与之前的操作、玩家等无关（为保证这是一个平等博弈）

翻硬币游戏有这样一个结论：一个局面的  $sg$  值等于所有正面硬币的  $sg$  值的异或，以 H 表示正，T 表示反，例如  $sg(\text{THHTTH}) = sg(\text{TH}) \oplus sg(\text{TTH}) \oplus sg(\text{TTTTTH})$

## Nim 积

$a \otimes b = \text{mex}\{a \otimes b \oplus a \otimes b' \mid 0 \leq b' < b\}$  满足交换律，结合律，对 nim 和（异或）满足分配律。全体非负整数在 nim 和和 nim 积下成一域 [Tartan Games]（即二维硬币游戏）的  $sg$  值是对应行列的 nim 积。

nim 积还具有如下的性质：

- $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$  当且仅当  $x = 0$  或  $y = 0$
- $1 \otimes x = x \otimes 1 = x$
- 对全体自然数  $n \in [0, 2^{2^n} - 1]$  中的自然数在 nim 和和 nim 积下成一域
- 对全体自然数  $n \in [2^{2^n} \otimes x = 2^{2^n} \times x \mid 0 \leq x < 2^{2^n}]$
- 对全体自然数  $n \in [2^{2^n} \otimes 2^{2^n} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2^n} = 2^{2^n} \oplus 2^{2^n - 1}]$

## surreal number

$\text{surreal number}$  是一个包含无穷小、无穷大和实数的域，用它可以十分方便地研究一些不平等博弈问题。 $\text{surreal number}$  定义为一个集合对  $\{L|R\}$  其中  $L$  中的每个元素小于  $R$  中的每个元素。我们称  $x \leq y$  当且仅当不存在  $x_L \in X_L$  使得  $y \leq x_L$  且不存在  $y_R \in Y_R$  使得  $y_R \leq x$ 。 $\text{surreal number}$  有如下的一些性质：

- 对于一个  $\text{surreal number}$   $x = \{L|R\}$   $x$  大于  $L$  中的任意一个元素，小于  $R$  中的任意

一个元素。

- 对于一个  $surreal\;number$   $x = \{L|R\}$  若  $L$  有最大值  $l_{\max}$  则  $x = \{l_{\max}|R\}$  对于  $R$  同理。
- 设  $a$  到  $b$  之间最早出生的  $surreal\;number$  在第  $i$  天出生，那么在  $a$  到  $b$  之间且在第  $i$  天出生的  $surreal\;number$  有且只有一个。
- 若  $a < x < b$  且  $x$  是  $a$  和  $b$  之间最早出生的  $surreal\;number$  则  $x = \{a|b\}$

$surreal\;number$  的加法法则为

$$x+y = \{X_L|X_R\} + \{Y_L|Y_R\} = \{X_L+y, x+Y_L|X_R+y, x+Y_R\}$$

$surreal\;number$  的取反法则为  $-x = -\{X_L|X_R\} = \{-X_R|-X_L\}$

$surreal\;number$  的乘法法则为  $xy = \{X_L|X_R\} \{Y_L|Y_R\} = \{X_Ly+xY_L-X_LY_L, X_Ry+xY_R-X_RY_R|X_Ly+xY_R-X_LY_R, xY_L+X_Ry-X_RY_L\}$

$surreal\;number$  的取逆法则为  $\frac{1}{y} = \{0, \frac{1+(y^R-y)}{(y^L)^L}\} \{y^R\}, \frac{1+(y^L-y)}{(y^L)^R}\} \{y^L\} | \frac{1+(y^L-y)}{(y^L)^L}\} \{y^L\}, \frac{1+(y^R-y)}{(y^R)^R}\} \{y^R\}\}$  其中  $y^L > 0, y^R > 0$

设有一组合游戏处于局面  $P$  玩家  $L$  可以转移到的状态为  $P^L$  玩家  $R$  可以转移到的状态为  $P^R$  我们记  $P = \{P^L|P^R\}$  那么：

- 若  $P > 0$  则不论先手还是后手  $L$  获胜
- 若  $P < 0$  则不论先手还是后手  $R$  获胜
- 若  $P = 0$  则后手获胜

类似于  $Nim$  和游戏，若有  $n$  个不平等游戏  $P_1, \dots, P_n$  它们分别对应的  $surreal\;number$  为  $x_1, \dots, x_n$  则  $P_1 + \dots + P_n$  对应的  $surreal\;number$  为  $x_1 + \dots + x_n$

最后给出一些无穷大和无穷小的  $surreal\;number$

$$\begin{aligned} & \{0 | 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\} = \epsilon \text{ (无穷小)} \\ & \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \omega \text{ (无穷大)} \\ & \{0 | \epsilon\} = \frac{\epsilon}{2} \quad \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\} = \omega + 1 \\ & \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\} = \omega - 1 \quad \{\omega | \omega + 1\} = \omega + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## SJ 定理

对一个  $Nim$  游戏，如果定义使得所有子游戏的  $sg$  值为  $0$  的玩家胜利，先手必胜的条件为：

- 游戏的  $sg$  值为  $0$  且所有子游戏  $sg$  值均不超过  $1$ 。
- 游戏的  $sg$  值不为  $0$  且至少一个子游戏  $sg$  值超过  $1$ 。

# 数学分析

## Wallis公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2]^{2n+1}}{2n+1}$$

## Stirling公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$$

## n维球

n维球的体积公式 
$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n$$

n维球的表面积公

式 
$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1} = V'_n(r)$$

其中伽马函数  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$  满足

- $\Gamma(1)=1, \Gamma(z+1)=z\Gamma(z) (z>0)$
- $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} (z \notin \mathbb{Z})$
- $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

## KKT 条件

设有函数  $f(\mathbf{p})$  我们要求在

$g_1(\mathbf{p}) \leq 0, \dots, g_n(\mathbf{p}) \leq 0, h_1(\mathbf{p}) = \dots = h_m(\mathbf{p}) = 0$  的条件下求其极小值，则必要条件为：

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^n \mu_i \nabla g_i(\mathbf{p}) = 0 \\ h_i(\mathbf{p}) = 0 \\ \mu_i g_i(\mathbf{p}) = 0 \\ \mu_i \geq 0 \end{cases}$$

可以看出这是拉格朗日乘因子法的推广。如果  $f$  是凸函数（注意凸函数要求定义域是凸集，即  $g$  和  $h$  的限制以及  $f$  的定义域都要是凸集），那么 KKT 条件是充要的。

## 组合数学

## 划分数

设  $p(n)$  为将  $n$  写成若干个正整数和的方案数，若  $i$  为自然数，称  $\frac{3i^2-i}{2}$  和  $\frac{3i^2+i}{2}$  为广义五边形数，并定义  $f(\frac{3i^2-i}{2}) = f(\frac{3i^2+i}{2}) = i$  则  $p(n) = \sum_{u, 1 \leq u \leq n} (-1)^{f(u)-1} p(n-u)$  其中  $u$  为广义五边形数  $\phi(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i)$  称为欧拉函数，它是划分数生成函数的逆  $\phi(x) = \sum_u (-1)^{f(u)} x^u$  其中  $u$  为广义五边形数。从  $0$  开始  $p(n)$  的前若干项为  $1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77$ 。

## 划分数容斥

在集合  $S$  上定义一个等价关系，有  $n$  个位置可以取  $S$  中的值，要求两两值不同，另外还有一些别的限制。设  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  可以在  $M$  的划分上进行容斥  $P$  表示  $P$  中每个子集中的元素相等，而子集间的关系不受限制，那么  $P$  的容斥系数是  $\prod_{Q \in P} (-1)^{|Q|-1} (|Q|-1)!$  特别地，如果这  $n$  的位置本质相同，还可以枚举划分数来做。证明

## 模2意义下的组合数

$\binom{n}{m} \% 2 = 1$  当且仅当  $n$  在  $m$  为  $1$  的二进制位上都为  $1$ 。易知  $\binom{n+m}{m} \% 2 = 1$  当且仅当  $n$  在  $m$  为  $1$  的二进制位上都为  $0$ 。

## 默慈金数

设  $M_n$  表示在一个圆上的  $n$  个不同点间，画出彼此不相交的弦的全部方法的总数  $M_0 = M_1 = 1, M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-i-1} = \frac{2n+3}{n+3} M_n + \frac{3n}{n+3} M_{n-1}$  它也可以表示数列  $\{a_i\} (0 \leq i \leq n)$  的数量，满足  $a_0 = a_n = 0, a_i \geq 0, |a_i - a_{i+1}| \leq 1$  从  $0$  开始  $M_n$  的前若干项为  $\begin{aligned} &1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, \\ &5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, \\ &2356779, 6536382, 18199284, 50852019, 142547559, \\ &400763223, 1129760415, 3192727797, 9043402501, \\ &25669818476, 73007772802, 208023278209, 593742784829 \end{aligned}$

## 卡特兰数

设  $C_0 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$  它满足  $C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$  它可以表示：

- $n$  对括号组成的合法的表达式种数
- $n$  个结点不同构二叉树的方案数
- $n \times n$  格点中不越过对角线的单调路径的个数。单调路径是指从左下角走到右上角，每步向右或向上。

- 通过连接顶点将  $n+2$  条边的凸多边形分成三角形的方案数
- 以  $\{1, 2, \dots, n\}$  为进栈序列的合法出栈序列个数
- 集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  的不交叉划分的个数
- 用  $n$  个长方形填充一个高度为  $n$  的阶梯状图形的方法个数

从  $0$  开始  $C_n$  的前若干项为  $\begin{aligned} &1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \\ &4862, 16796, 58786, 208012, 742900, \\ &2674440, 9694845, 35357670, 129644790, \\ &477638700, 1767263190 \end{aligned}$

## 伯努利数

$B_0 = 1, B_i = -\sum_{j=0}^{i-1} C_i^j B_j$ . 伯努利数的指数型母函数是  $\frac{x}{e^x - 1}$ . 伯努利数可用于计算等幂和  $\sum_{k=1}^n k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}$ . 从  $0$  开始  $B_n$  的前若干项为  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}$

## 上升阶乘幂和下降阶乘幂

$(x)^{(n)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$  称为上升阶乘幂  $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$  称为下降阶乘幂。满足：

- $(a+b)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (a)^{(n-i)} (b)^{(i)}$
- $(a+b)_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (a)_{n-i} (b)_i$
- $(x)_m (x)_n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{m-k} k! (x)_{m+n-k}$

## 斯特林数

### 第一类斯特林数

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  表示  $n$  个元素的置换中能被分解为  $k$  个循环的置换个数，并定义  $s(n, k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} k > 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \begin{bmatrix} n > 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$  该数列满足：

- $(x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$
- $(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k$

也就是说，对于一个固定的  $n, (x)^{(n)}$  和  $(x)_n$  分别是  $\begin{bmatrix} n \\ \cdot \end{bmatrix}$  和  $s(n, \cdot)$  的生成函数。

对于一个固定的  $k, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  的指数型生成函数为  $\frac{\ln^k x}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!}$

另外还有：

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!}$
- $\sum_{k=0}^m \binom{m+n}{k} \binom{n}{m-k}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} \binom{n-k}{n-k-l}$

## 第二类斯特林数

$\binom{n}{k}$  表示有  $n$  个元素的集合划分为  $k$  个集合的方案数  
 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  ( $k > 0$ )  
 $\binom{0}{0} = 1$   
 $\binom{n}{0} = \binom{0}{n} = 0$  ( $n > 0$ )  
 该数列满足：

- $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

容易注意到这是一个卷积形式，可以  $\mathcal{O}(n \log n)$  地求出一个  $n$  对应的所有第二类斯特林数

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$
- $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$  其中  $B_n$  是贝尔数

对于一个固定的  $k$   $\binom{n}{k}$  的生成函数为  

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{\prod_{i=1}^k (1-kx)}$$
 其指数型生成函数为  

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

## 贝尔数

设  $B_n$  表示基数为  $n$  的集合的划分方法数，则  $B_n$  满足  
 $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$   
 $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$  其中  $S$  是第二类斯特林数，对任意质数  $p$  有  $B_{n+p} \equiv m B_n + B_{n+1} \pmod{p}$  其指数型母函数是  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$  从  $0$  开始  $B_n$  的前若干项为

$\&1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, \backslash\backslash$	$\&4140, 21147, 115975, 678570, \backslash\backslash$
$\&4213597, 27644437, 190899322, \backslash\backslash$	$\&1382958545, 10480142147, 82864869804, \backslash\backslash$
$\&682076806159, 5832742205057, 51724158235372, \backslash\backslash$	$\&474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346, \backslash\backslash$
$\&445958869294805289, 4638590332229999353, 49631246523618756274$	$\backslash\backslash$

## Burnside 引理

设  $G$  是一个有限群，作用于集合  $X$  上，对  $\forall g \in G$   $|X^g|$  表示  $X$  中在  $g$  作用下的不动元素的集合  $|X/G|$  表示  $X$  在  $G$  作用下的轨道数，则有  $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$

## Polya 定理

设  $\bar{G}$  是  $n$  个对象的一个置换群，用  $m$  种颜色涂染这  $n$  个对象，则不同染色的方案数为  $| = \frac{1}{|\bar{G}|} (m^{c(\bar{a}_1)} + m^{c(\bar{a}_2)} + \dots + m^{c(\bar{a}_g)})$  其中  $c(\bar{a}_i)$  表示置换  $\bar{a}_i$  的循环节数。

## 切比雪夫多项式

第一类切比雪夫多项式为  $T_n(\cos x) = \cos nx$  满足  $\frac{d}{dx} T_n(x) = n U_{n-1}(x)$  第二类切比雪夫多项式为  $U_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$  满足  $\frac{d}{dx} U_n(x) = n T_n(x)$

## 杨式矩阵和钩子公式

杨式矩阵是指满足以下两个条件的矩阵：

- 如果格子  $(i,j)$  没有元素，则它右边和上边的相邻格子也一定没有元素。
- 如果格子  $(i,j)$  有元素  $a_{i,j}$  则它右边和上边的相邻格子要么没有元素，要么有元素且比  $a_{i,j}$  大。

$1 \sim n$  所组成杨氏矩阵的个数可以通过下面的递推式得到：

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F(n-1) + (n-1)F(n-2)$$

钩子公式是指：对于给定形状，不同的杨氏矩阵的个数为  $n!$  除以每个格子的钩子长度加  $1$  的积。其中钩子长度定义为该格子右边的格子数和它上边的格子数之和。

## 全错排

$1 \sim n$  的全错排数量为  $n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}$

## 可拆分排列

排列的直和是指将两个排列拼起来，将右边的排列平移；排列的斜和是指将两个排列拼起来，将左边的排列平移。例如  $1,2,3$  和  $1,2,3,4,5$  的直和为  $1,2,3,4,5$ ，斜和为  $4,5,1,2,3$ 。定义可拆分排列为可以由  $1$  这一种

排列经过若干次斜和和直和的运算得到的排列。

## 大 Schröder 数

设  $S_n$  表示从  $(0,0)$  走到  $(n,n)$  每次只能向右、向上、向右上走一步，且不能跨过  $(0,0)$  到  $(n,n)$  的对角线的不同走法数量。那么有

$S_0=1, S_1=2, S_n=3S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}S_kS_{n-k-1}$   $S_n$  的生成函数是  $\frac{1-x-\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}$   $S_n=\sum_{i=0}^n\frac{1}{n-i+1}\frac{(2n-i)!}{i!(n-i)!^2}$

$S_n$  还可以表示长度为  $n+1$  的可拆分排列的数量。

从  $0$  开始  $S_n$  的前若干项为  $\begin{aligned} &1, 2, 6, 22, 90, 394, \\ &1806, 8558, 41586, 206098, \\ &1037718, 5293446, 27297738, \\ &142078746, 745387038, 3937603038, \\ &20927156706, 111818026018, 600318853926, \\ &3236724317174, 17518619320890, 95149655201962, \\ &518431875418926, 2832923350929742, 15521467648875090 \end{aligned}$

## 小 Schröder 数

设  $s_0=1, s_{i+1}=\frac{S_i}{2}$  那么  $s_n=\frac{1}{n}((6n-9)s_{n-1}-(n-3)s_{n-2})$   $s_n$  可以表示：

- 将  $n+1$  边形剖分的方案数
- 给  $n$  个数加括号的方案数

## 库默尔定理

设  $p$  为质数  $a, b$  在  $p$  进制下的表示分别为  $\overline{\cdots a_n \cdots a_0}$  和  $\overline{\cdots b_n \cdots b_0}$  那么  $\binom{a}{b}$  中含有质因子  $p$  的个数为满足  $\overline{\cdots a_i \cdots a_0} < \overline{\cdots b_i \cdots b_0}$  的下标  $i$  的个数。特别的，当  $a < b$  时， $\binom{a}{b} = 0$  而满足条件的  $i$  也有无穷多个。从另一种角度来说，也可以理解成  $b$  和  $a-b$  在做  $p$  进制加法时产生进位的次数。这可以得到一个显然的推论  $\binom{a}{b}$  中  $p$  的个数不超过  $\log_p a$

## 不动函数的数量

设  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  且  $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^k(i) = f(i)$  对  $\{1, 2, \dots, n\}$  成立，那么满足条件的  $f$  指数型生成函数为  $\exp(\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} \exp(x)^k)$

# 随机串包含给定串的期望长度

设有一串  $S$  从一个空串开始，每次等概率随机往后面加一个字符，包含  $S$  时停止。期望长度为  $\sum_{i=1}^{|S|} \frac{1}{|\Sigma|^i}$  [证明](#)

## 二项式反演

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

$$g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$$

## 广义二项式定理

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(\alpha)_k}{k!}$$

## 其它

$$\sum_{k \equiv m \pmod{2}} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} (2^n + (-1)^m 2^{\lfloor n/2 \rfloor})$$

# 数论

## 连分数与佩尔方程

记  $\langle x_0, x_1, x_2, x_3, \dots \rangle = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \dots}}}$  其中  $x_i > 0 (i \geq 1)$  称  $\frac{p_n}{q_n} = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  为它的第  $n$  个渐近分数。补充定义  $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$  则有递推式  $p_n = x_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2} (n \geq 1)$  对无限简单连分数，我们称  $\xi_n = \langle x_n, x_{n+1}, \dots \rangle$  为它的第  $n$  个完全商，满足  $\xi_0 = \frac{p_n \xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \xi_{n+1} + q_{n-1}}$  一个实数是二次根式当且仅当它是循环简单连分数，我们用  $\langle x_0, \dots, x_{m-1}, \overline{x_m, \dots, x_{m+l-1}} \rangle$  其中  $l$  是  $\xi_0$  的周期。设  $\xi_0 = \frac{\sqrt{d} + c_0}{r_0}, q_0 | d - c_0^2$  我们有  $\xi_n = \frac{\sqrt{d} + c_n}{r_n}$  其中  $r_{n+1} = r_{n-1} + \frac{c_n^2 - c_{n+1}^2}{r_n}, c_{n+1} = x_n r_n - c_n, a_n = \lfloor \xi_n \rfloor (n \geq 1)$

我们给出两个不定方程  $x^2 - dy^2 = 1$  和  $x^2 - dy^2 = -1$  若  $d$  为完全平方数，则第一个方程只有解  $(\pm 1, 0)$  第二个方程无解。若  $d$  不为完全平方数，设  $\xi_0 = \sqrt{d}$  设它的循环连分数周期为  $l$  渐近分数为  $\frac{p_n}{q_n}$  则：

- 当  $d$  为偶数时，第一个方程的全体正解为  $x=p_{j-1}, y=q_{j-1}, j=1, 2, 3, \dots$  第二个方程无解
- 当  $d$  为奇数时，第一个方程的全体正解为  $x=p_{j-1}, y=q_{j-1}, j=2, 4, 6, \dots$  第二个方程的全体正解为  $x=p_{j-1}, y=q_{j-1}, j=1, 3, 5, \dots$

还有另一种更加简单的表示方法：

- 当  $d$  为偶数时，第一个方程的全体解为  $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{j-1}\pm q_{j-1}\sqrt{d})^j, j=0, 1, 2, \dots$  第二个方程无解
- 当  $d$  为奇数时，第一个方程的全体正解为  $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{j-1}\pm q_{j-1}\sqrt{d})^j, j=0, 2, 4, \dots$  第二个方程的全体正解为  $x+y\sqrt{d}=\pm(p_{j-1}\pm q_{j-1}\sqrt{d})^j, j=1, 3, 5, \dots$

设有一佩尔方程  $x^2-ny^2=k$  利用 Brahmagupta's identity 求

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac-nbd)^2+n(ad+bc)^2=(ac+nbd)^2+n(ad-bc)^2$$

设  $(x_1, y_1)$  是  $x^2-ny^2=k$  的最小解  $(x_2, y_2)$  是  $x^2-ny^2=1$  的解，那么  $(x_1^2-ny_1^2)(x_2^2-ny_2^2)=(x_1x_2+ny_1y_2)^2-n(x_1y_2+x_2y_1)^2=(x_1x_2-ny_1y_2)^2-n(x_1y_2-x_2y_1)^2=k$  从而  $(x_1x_2+ny_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$  和  $(x_1x_2-ny_1y_2, x_1y_2-x_2y_1)$  都是原方程的解。

对于  $ax^2-by^2=c$  型的佩尔方程，改写成  $(ax)^2-aby^2=ac$  的形式就可以了。

## 指数循环节

对  $\forall a, b, n \in \mathbb{N}^+, b \geq \phi(n)$  有  $a^b \equiv a^{b \% \phi(n) + \phi(n)} \pmod{n}$   
 注意  $b \geq \phi(n)$  是必要条件，以及式子中取模后指数必须加上  $\phi(n)$  否则结果可能会出错。

## 威尔逊定理

$$\prod_{i=1, \gcd(i, m)=1}^m i \equiv \begin{cases} -1 & (m=1, 2, 4, p^1, 2p^1, \text{p is odd prime}) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \pmod{m}$$

## 类欧几里得算法

设  $f(a, b, c, n, t_1, t_2) = \sum_{i=0}^n i^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor} \pmod{t_2}$  求解这一函数值的算法称为类欧几里得算法。这里仅讨论  $n$  个参数均为非负整数的情况，且定义  $0^0=1$ ：

$$\begin{aligned} \text{定义 } m &= \lfloor \frac{an+b}{c} \rfloor \\ g_t(x) &= (x+1)^t - x^t = \sum_{i=0}^{t-1} g_{ti} x^i \\ h_t(x) &= \sum_{i=1}^x i^t = \sum_{i=0}^{t+1} h_{ti} x_i \end{aligned}$$

- 若  $t_2=0$  有：

$$\text{原式} = h_{t_1}(n) + [t_1=0]$$

- 若  $m=0$  有：

$$原式=0$$

- 若  $a=0$  有：

$$原式=\lfloor\frac{b}{c}\rfloor^{t_2}(h_{t_1}(n)+[t_1=0])$$

- 若  $a \geq c$  或  $b \geq c$  有：

$$原式=\sum_{u_1+u_2+u_3=t_2} \binom{t_2}{u_1, u_2, u_3} (\lfloor\frac{a}{c}\rfloor)^{u_2} (\lfloor\frac{b}{c}\rfloor)^{u_3} f(a\%c, b\%c, c, n, t_1+u_2, u_1)$$

- 若  $0 \leq a, b < c$  有：

$$原式=m^{t_2} h_{t_1}(n) - \sum_{u=0}^{t_2-1} \sum_{v=0}^{t_1+1} g_{t_2}^u h_{t_1}^v f(c, c-b-1, a, m-1, u, v)$$

特别地，若  $t_1=0, t_2=1$  则有：

- 若  $m=0$  有：

$$原式=0$$

- 若  $a=0$  有：

$$原式=\lfloor\frac{b}{c}\rfloor^{n+1}$$

- 若  $a \geq c$  或  $b \geq c$  有：

$$原式=\frac{n(n+1)}{2} \lfloor\frac{a}{c}\rfloor + (n+1) \lfloor\frac{b}{c}\rfloor + f(a\%c, b\%c, c, n)$$

- 若  $0 \leq a, b < c$  有：

$$原式=nm - f(c, c-b-1, a, m-1)$$

证明

## 莫比乌斯反演

$$f_n = \sum_{d|n} g_d \Leftrightarrow g_n = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f_d \\ f_n = \sum_{n|d} g_d \Leftrightarrow g_n = \sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n}) f_d$$

若  $t$  为完全积性函数，且  $t(1)=1$  那么

$$f_n = \sum_{i=1}^n t(i) g_{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor} \Leftrightarrow g_n = \sum_{i=1}^n \mu(i) t(i) f_{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}$$

## 其他

$x^2+y^2=4t$  的整数解的个数为  $4(\sigma_1(t)-\sigma_3(t))$  其中  $\sigma_1(t)$  表示  $t$  的约数中模 4 余 1 的个数  $\sigma_3(t)$  表示  $t$  的约数中模 4 余 3 的个数。这一结论等价于，若  $t$  中某  $4k+3$  型的质数  $p$  有奇数个，则无解。否则，答案为所有  $4k+1$  型质数的积的约数个数乘 4。

设有  $m$  个正整数  $c_1, c_2, \dots, c_m$  且严格递增。所有大于等于  $c_{m-1}c_m$  且能被  $\gcd(c_1, c_2, \dots, c_m)$  整除的整数可以用这  $m$  个数使用非负整系数线性表示。证明

## 线性代数

矩阵的秩等于它最大的非零子式的阶数。对称矩阵的秩等于它最大的非零主子式的阶数（即选取同样的行和列）。[对称矩阵情况下的证明](#)，好难找啊。

## 抽象代数

### 有限群中元素的幂

设  $G$  为一有限群。令  $|G|=n$  对于  $G$  的每个元素  $a$  有  $a^n=e$

## 计算几何

### 球面几何

设球冠的高为  $h$  半径为  $R$  则表面积为  $2\pi Rh$

球面三角形的面积为  $(A+B+C-\pi)R^2$

球面正弦定理  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

球面余弦定理  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ ,  $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

### 皮克定理

设有一格点多边形，其面积  $S=a+\frac{b}{2}-1$  其中  $a$  表示多边形内部的整点数  $b$  表示多边形边界上的整点数。

### 直线反演

将  $y=kx+b$  反演到  $(-k,b)$  将  $(k,b)$  反演到  $y=-kx+b$  这样，两点共线反演为两条直线交于一点，

该点是原直线反演出的点。

## 笛卡尔定理

假设有四个两两相切的圆，设第  $i$  个的曲率为  $k_i = \pm \frac{1}{r_i}$  当该圆与其它圆相外切时，曲率为正，否则为负。那么有  $\sum_{i=1}^4 k_i^2 = (\sum_{i=1}^4 k_i)^2$  推广到  $n$  维，有  $\sum_{i=1}^{n+2} k_i^2 = (\sum_{i=1}^{n+2} k_i)^2$

## 其它

简单多边形中的抛物线长度可以用有向线段来计算。

极角排序后扫描线可以分成上下两个半平面后归并。

有理坐标正多边形只有正方形一种。

三角形的垂心、外心、重心和九点圆圆心共线，其中九点圆圆心到垂心和外心的距离相等，而且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半。

## 图论

### 其它

一个森林内部节点的度数平方和等于  $2 \times (\text{长度为 } 2 \text{ 的路径数} + \text{长度为 } 3 \text{ 的路径数})$ 。

一个  $n \times m$  的四连通网格图的生成树数量为  $\prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} (4 \sin^2(\frac{\pi i}{2m}) + 4 \sin^2(\frac{\pi j}{2n}))$

## 概率论

### 一维随机游走

在  $[0, n]$  上随机游走，从  $x$  出发，每次等概率移动  $\pm 1$  走到  $0$  的期望步数是  $x(2n-x)$

## 其它

### 拉格朗日插值法

对某个多项式函数，已知有给定的  $k+1$  个取值点  $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$  则有  $L(x) = \sum \lim_{i \rightarrow 0}^{k} y_i l_i(x)$  其中每个  $l_i(x)$  为拉格朗日基本多项式，其表达式为

$$|_{i}(x)=\prod\limits_{j=0,j\neq i}^k\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

## 牛顿迭代法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

## Stern-Brocot tree

设有一棵无限的区间树，根结点所表示的区间为  $[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$  设父结点所表示的区间为  $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]$  则它的左右孩子分别表示  $[\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}]$  和  $[\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}]$  这棵树不重不漏地表示了所有正的既约的有理数。

## Tree of primitive Pythagorean triples

设有一棵无限的满二叉树，根结点表示列向量  $(3,4,5)^T$  设有三个矩阵  $A=\begin{pmatrix} 1&-2&2 \\ 2&-1&2 \\ 2&-2&3 \end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix} 1&2&2 \\ 2&1&2 \\ 2&2&3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -1&2&2 \\ -2&1&2 \\ -2&2&3 \end{pmatrix}$$

设父结点的向量为  $\alpha$  则它从左到右的三个孩子的向量分别为  $A\alpha, B\alpha, C\alpha$  这棵树不重不漏地枚举完了所有基本毕达哥拉斯三元组  $a^2+b^2=c^2$

## 最大反链

给定一个非负整数数列  $\{t_i\}$  定义偏序集  $S=\prod_{i=1}^n\{x|0\leq x\leq t_i, x\in\mathbb{Z}\}$  其中  $\vec{x}\preceq\vec{y}$  当且仅当  $\forall i, 1\leq i\leq n, x_i\leq y_i$  那么  $S$  的最大反链的大小等于关于  $x_i$  的不定方程 
$$\sum_{i=1}^n x_i = \lfloor \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{2} \rfloor$$
 满足  $\forall i, 1\leq i\leq n, 0\leq x_i\leq t_i$  的整数解的个数。证明

## 矩阵乘法

设  $\oplus, \otimes$  为二元运算，且  $\oplus$  满足交换律和结合律  $\otimes$  满足结合律  $\otimes$  对  $\oplus$  满足分配律。定义新的矩阵乘法  $A_{n,m}\times B_{m,p}=C_{n,p}$  其中  $c_{i,j}=\bigoplus_{k=1}^m a_{i,k}\otimes b_{k,j}$  那么这种矩阵乘法满足结合律。除了通常的  $\oplus$  代表加法和  $\otimes$  代表乘法外  $\oplus$  代表取最大/最小值  $\otimes$  代表加法；在  $[0, +\infty)$  上定义  $\oplus$  代表取最大/最小值  $\otimes$  代表乘法，都满足条件。其中后两者对一些求最优值的 dp 优化有一定的作用。证明

# gcc内建二进制函数

- `__builtin_popcount(x)` 表示  $x$  二进制中  $1$  的个数。
- `__builtin_parity(x)` 表示  $x$  二进制中  $1$  的个数的奇偶性。
- `__builtin_clz(x)` 表示  $x$  二进制中前导  $0$  的个数。
- `__builtin_ctz(x)` 表示  $x$  二进制中结尾  $0$  的个数。
- `__builtin_ffs(x)` 表示  $x$  二进制中右起第一个  $1$  的位置。

以上函数传入的参数为 `unsigned int` , 如需对 `unsigned long long` 使用 , 需要在函数名的最后加上 `ll` , 如 `__builtin_popcountll` `__builtin_clz(x)` 和 `__builtin_ctz(x)` 两者在  $x=0$  时未定义

## 一类关于集合的计数问题

设有两个集合  $A, B \subset \mathbb{N}$  且  $0 \in A, 1 \in B, |A|=n, |B|=m$  定义  $A+B = \{x+y | x \in A, y \in B\}$  若  $A+B = [1, nm] \cap \mathbb{N}^{\{+\}}$  则称  $(A, B)$  是好的。问这样的集合对有多少个。

这一问题的答案为：

$$\begin{cases} 1 & (n=1 \vee m=1) \\ f(n, m) + f(m, n) & (n > 1 \wedge m > 1) \end{cases}$$

其中  $f(n, m) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i(n)(g_i(m) + g_{i+1}(m))$   $g_i(n)$  表示将  $n$  分解成  $i$  个大于  $1$  的数的乘积的方案数 (有序)。 [证明](#)

## 加法链

对于一个正整数  $n$  它的一个加法链是一个序列  $v_0, \dots, v_s$  其中  $v_0=1, v_s=n$  对于所有的  $v_1, \dots, v_s$  它们都是前面某两个数的和。一种常见的较短的加法链即为快速幂对指数的拆分方法。设  $n$  的二进制表示下  $1$  的个数为  $v(n)$  那么使用快速幂的加法链的长度为  $\lfloor \log_2 n \rfloor + v(n) - 1$  另外, 设  $n$  最短的加法链长度为  $l(n)$  Knuth 猜想  $l(n) \geq \lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 v(n) \rceil$  且这一猜想对  $v(n) \leq 8$  已经得到证明。

## 高斯数值积分

求一个  $[-1, 1]$  上的积分, 可以使用高斯积分。它近似等于  $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$  当  $f(x)$  可以用不超过  $2n-1$  次的多项式近似时, 此方法精度较高。下面对  $n=1 \sim 5$  列出  $w$  和  $f$  的表。

$n$	$x_i$	$w_i$
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$

$n$	$x_i$	$w_i$
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$

若积分区间不是  $[-1, 1]$ ，那么需要变换积分区间  $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}) dx$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:conclusion&rev=1614586351>

Last update: 2021/03/01 16:12