

支配树学习笔记

给一个有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 给定一个起点 s 对于两点 x, y 若删去 x 后, s 不能到达 y 那么 x 是 y 的支配点 s 和 y 是两个平凡的支配点。

支配点之间形成了一棵树的关系, 称为支配树。

定理 1: 支配关系形成一棵树。

证明: 假设 x, y 是 z 的支配点, 那么必然有一条简单路径为 $s \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ 或 $s \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow z$ 的形式, 不妨设为前者。若 x 不是 y 的支配点, 那么就存在路径 $s \rightarrow y \rightarrow z$ (其中 $s \rightarrow y$ 不经过 $x \rightarrow y \rightarrow z$ 也不经过 x 因为是简单路径), 与 x 支配 z 矛盾。因此 z 的所有支配点之间也两两相互支配, 形成树关系 $\Box$

有根树的支配树

显然是它本身。

DAG 的支配树

考虑按拓扑序构建, 加入点 u 时, 它的所有入点已经在支配树中了, 显然这些点在支配树上的 LCA 是 $\text{idom}(u)$

半支配点

考虑一般的有向图, 以 s 为根任意建一根 dfs 树, 为了方便, 不妨用 dfn 对点重编号。

定义 u 的半支配点 $\text{sdom}(u) = \min\{v \mid \text{exists } v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_t \rightarrow u, v_1, \dots, v_t > u\}$ 即所有满足下面条件的点 v 中的最小点: 存在一条从 v 到 u 的路径, 使得路径上除 u, v 外的所有点都大于 u

除根之外, 半支配点唯一存在, 因为 u 在 dfs 树上的父亲满足条件, 且半支配点取最小的那个。

定理 2: u 的半支配点一定是 u 的祖先。

证明: 假设 $v = \text{sdom}(u)$ 不是 u 的祖先。由于 $\text{fa}_u < u$ 因此 $v < u$ 因此在 dfs 建树的过程中, 由于 v 能到达 u u 一定在 v 的子树中, 矛盾 $\Box$

定理 3: 将图中所有非树边删去, 加连 $\text{sdom}(u) \rightarrow u$ 后, 支配点不变。

证明: 设新图为 G'

G' 中 x 不支配 $y \Rightarrow G$ 中 x 不支配 y

一定存在一条路径 $1 \rightarrow \dots \rightarrow z \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow y$ 其中 $z < x < w \leq y$ 且依次为祖先关系。由于 $z \rightarrow w$ 是 G' 上的非树边, 因此一定有 $z = \text{sdom}(w)$ 因此在 G 中 z 到 w 存在一条路径, 中间的每个点 $> w > x$ 因此这条路径在 G 中没有经过 x

G 中 x 不支配 $y \Rightarrow G'$ 中 x 不支配 y

存在一条路径 $l \rightarrow \dots \rightarrow y$ 不经过 x 。考虑抽出这条路径上所有为 y 祖先的点，那么一定存在相邻的两个点，第一个 $x < \dots$ 而第二个 $> \dots$ 不妨设为 $z < x < w \leq y$ 。这条路径上 z 到 w 中间都不是 y 的祖先，当然也不是 w 的祖先。假设这其中存在一个点 $< w$ 。那么与前面类似，这个点在 dfs 时应当是 w 的祖先，矛盾。从而 $\text{sdom}(w) \leq z$ 。因而 $l \rightarrow \dots \rightarrow \text{sdom}(w) \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow y$ 是 G 的一条不经过 x 的路径。 $\square$

注意到 G 是一个 DAG。因此可以在 $\mathcal{O}(n \log n)$ 的时间内求出支配树。

下面讨论半支配点的求法。首先证明一个引理，对于 $u < v$ ， u 到 v 的任意路径上一定经过 v 的祖先。

证明：假设不经过，前向边和横叉边都使得 u 减小，树边和后向边只能往子树走，由于这个 u 不是 v 的祖先，因此 u 的整个子树都 $< v$ 。因此 u 永远走不到 v 。矛盾。 $\square$

考虑枚举 u 的半支配点路径上前面一个结点 v 。即枚举 u 的所有入边。若 $v < u$ 。那么路径只能是 $v \rightarrow u$ 。 $\text{sdom}(u) = \min\{\text{sdom}(u), v\}$ 。

若 $v > u$ 。考虑一条符合要求的路径，设路径上第一次出现的 v 的祖先为 w 。显然路径一直到 w 的过程中都大于 w 。否则与引理矛盾。因此该路径满足 w 的要求。而对于所有 v 的大于 $\text{LCA}(u, v)$ 的祖先，它们的半支配点显然也满足 u 。因此用它们更新 $\text{sdom}(u)$ 可以找到最优值。

支配点

定义 $\text{idom}(u)$ 为 u 在支配树上的父亲。

u 的支配点都是 u 的祖先。显然 $\text{sdom}(u)$ 到 u 之间的点不会是 u 的支配点，所以 $\text{idom}(u)$ 是 $\text{sdom}(u)$ 的祖先。

定理 4：若 v 是 u 的祖先，要么 $\text{idom}(v) \geq \text{idom}(u)$ 。要么 $v \leq \text{idom}(u)$ 。

证明：假设 $\text{idom}(v) < \text{idom}(u) < v < u$ 。注意到 $\text{idom}(u)$ 不是 v 的支配点，因此存在一条 l 到 v 的路径不经过 $\text{idom}(u)$ 。矛盾。 $\square$

下面讨论支配点的求法。

定义 $S(u)$ 表示 $\text{sdom}(u)$ 到 u 的所有结点（不含 $\text{sdom}(u)$ ）。记 v 为 $S(u)$ 中 sdom 最小的点。

若 $\text{sdom}(v) = \text{sdom}(u)$ 。那么有 $\text{sdom}(u)$ 是 u 的支配点。否则，使用定理 3 类似的方法可以证明 $\text{sdom}(u) < \text{sdom}(u)$ 。由定理 4 可知 $\text{idom}(u) = \text{sdom}(u)$ 。

若 $\text{sdom}(v) < \text{sdom}(u)$ 。那么有 $\text{idom}(v) \leq \text{idom}(v) < \text{sdom}(v) < \text{sdom}(u) < v < u$ 。定理 4 中 $v \leq \text{idom}(u)$ 显然不成立，因此 $\text{idom}(v) \geq \text{idom}(u)$ 。

假设存在一条 $l \rightarrow u$ 的路径不经过 $\text{idom}(v)$ 。那么它不能经过 $\text{idom}(v)$ 到 v 中的任意点。考虑抽出这条路径上所有为 u 祖先的点，那么一定存在相邻的两个点，第一个 $< \text{idom}(v)$ 。而第二个 $> v$ 。不妨设为 $x < \text{idom}(v) < v < z \leq u$ 。这条路径上 x 到 z 中间都不是 u 的祖先，当然也不是 z 的祖先。假设这其中存在一个点 $< z$ 。那么与前面类似，这个点

在 dfs 时应当是 z 的祖先，矛盾。从而 $\text{sdom}(z) \leq x < \text{idom}(v) \leq \text{sdom}(v)$ 这与 v 的最小性矛盾。因此 $\text{idom}(v)$ 是 u 的支配点，从而 $\text{idom}(u) = \text{idom}(v)$

实现

求 sdom 时，从大到小维护每个点，计算完某个点后把它和它的所有孩子连接起来。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:dominator_tree



Last update: **2021/03/15 13:52**