

有限二人零和博弈

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ $Y = \{1, 2, \dots, m\}$ 即 X, Y 均为有限集 X 表示玩家 I 的（纯）策略集合 Y 表示玩家 II 的（纯）策略集合。若玩家 I 选择纯策略 $i \in X$ 玩家 II 选择纯策略 $j \in Y$ 那么玩家 I 将获得 A_{ij} 的收益，玩家 II 将获得 $-A_{ij}$ 的收益（零和）。注意在该游戏的原始定义中，两人应当同时提出策略，即不知道对方的策略。此外，不妨将玩家 II 的收益也称为 A 但是他的目标是最小化之。

此外，考虑混和策略 X^* 和 Y^*

$$\begin{aligned} X^* &= \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^n p_i = 1\} \\ Y^* &= \{q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m : q_i \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^m q_i = 1\} \end{aligned}$$

含义为玩家 I 以 p_i 的概率选择纯策略 i 下文中，不加说明的策略均指混合策略。

现在改变一下游戏规则，不妨假设玩家 II 需要先声明自己的策略，玩家 I 随后选择自己的策略。那么玩家 I 选择策略 p 的收益是 $p^T A q$ 显然玩家 I 将选择对于特定的 q 收益最大的 p 玩家 II 则在玩家 I 选择的基础上选择收益最小的 q 那么玩家 I 的收益将是

$$\overline{V} = \min_{q \in Y^*} \max_{p \in X^*} p^T A q$$

可以发现，这意味着玩家 II 可以在原游戏中保证自己的收益不超过 $\overline{V}$ 他只要选择同样的操作即可。

将两人的操作顺序反过来，同理有

$$\underline{V} = \max_{p \in X^*} \min_{q \in Y^*} p^T A q$$

这意味着玩家 I 可以在原游戏中保证自己的收益不低于 $\underline{V}$ 他只要选择同样的操作即可。

首先证明 $\underline{V} \leq \overline{V}$ 这对于任意集合 X^* 和 Y^* 和定义在 $X^* \times Y^*$ 上的实值函数 f 都成立，即证明

$$\max_{x \in X^*} \min_{y \in Y^*} f(x, y) \leq \min_{y \in Y^*} \max_{x \in X^*} f(x, y)$$

注意到

$$\min_{y' \in Y^*} f(x, y') \leq f(x, y) \leq \max_{x' \in X^*} f(x', y)$$

对任意 x, y 都成立。因此对左侧加上 $\max_{x \in X^*}$ 右侧加上 $\min_{y \in Y^*}$ 不影响不等式。

事实上，可以证明在这一问题中 $\underline{V} = \overline{V}$ 注意到在上述两种简化问题中，后手必然有最优的纯策略。事实上最优的策略是所有最优的纯策略的线性组合。考虑线性规划问题

$$\text{maximize } \min_{j \in Y} \sum_{i=1}^n p_i a_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad p_i \geq 0$$

但是这不是个线性规划，因为优化目标中有个 $\min$ 添加一个辅助变量 v

$$\text{maximize } v$$

s.t.

$$v \leq \sum_{i=1}^n p_i a_{ij} \quad \text{for all } j \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad p_i \geq 0$$

它的解即为 $\underline{V}$

考虑另一个线性规划：

$$\text{minimize } v$$

s.t.

$$v \leq \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j \quad \text{for all } i \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1 \quad q_j \geq 0$$

它的解即为 $\overline{V}$

注意到这两个线性规划互为对偶，因而有 $\underline{V} = \overline{V}$ 记该值为 V 称为该游戏的值。这一定理称为最小最大值定理。

这样一来，玩家 I 可以保证自己至少获得 V 的收益，玩家 II 可以保证对方至多获得 V 的收益。那么显然两人都会按照这样的策略行动。这也预示着该问题可用线性规划求解。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:finite_two_person_zero_sum_game

Last update: 2021/07/10 00:20