2025/11/29 19:21 1/3 例题

例题

来源[Part I, 1.5.3-Ferguson

题目大意:有一堆 \$31\$ 颗的石子,每次可以取 \$1\sim6\$ 颗,但是每种数量至多取 \$4\$ 次。问胜负情况。

题解:不妨先不考虑 \$4\$ 个的限制。这个比较简单,模 \$7\$ 余 \$0\$ 的状态是负态。然而如果先手按这种策略操作,只要后手一直取 \$4\$, 先手最后一轮将无 \$3\$ 可用。

事实上,先手先取 \$5\$ 仍可保证取胜。如果后手一直也取 \$5\$,先手取 \$2\$ 来应对。取了 \$4\$ 个 \$5\$ 和 \$3\$ 个 \$2\$ 后,还剩 \$5\$ 个,此时已经不能再取 \$5\$ 了,因此后手不论怎么取都会输。如果后手某一回合不取 \$5\$ 了,先手可以立即转移到模 \$7\$ 余 \$0\$ 的状态,可以验证这时不论如何先手不会没东西可用,因为开始的若干操作拖延了一回合。

例题

来源[Part I, 1.5.5-Ferguson

题目大意:有两堆石子,每次操作可以将某堆石子清空,然后把剩下的一堆石子分成两个非空的堆。问胜负情况。

题解:如果两堆石子都是奇数,那么先手负,否则先手胜。如果至少有一堆石子是偶数,那么我们可以把 这堆石子拆成两个奇数堆,从而转移到负态。而如果两堆石子都是奇数个,显然拆出来至少有一个偶数。

例题

来源□Part I, 1.5.6-Ferguson

题目大意:给你一个矩形网格,每次选取一个格子,将该格子右上方的部分删除,删掉左下角格子的玩家输。证明除 \$1\times1\$ 外,先手必胜。

题解:假如删掉右上角的格子后是负态,那么命题已经成立。否则后手一定可以进行某种操作转移到一个负态,而容易发现这个操作先手同样可以完成。

例题

来源□Part I, 1.5.7.a-Ferguson

题目大意:有一堆 \$n\$ 颗的石子,先手可以任意取,但是不能取完,之后每个人至多只能取上一次取的数量。问胜负情况。

题解:我们首先归纳地证明,对于每个 $k \le 0$ 如果当前石子数能被 2^{k+1} 整除,且至少能拿 2^{k} 个石子,那么当前这个人不会取 $| 2^{k}$ 个石子。

\$k=0\$ 时显然,如果先手只拿\$1\$个,那么之后所有人都只能拿\$1\$个石子,显然先手就输了。

假设 \$\le k\$ 时成立□\$k+1\$ 时,假如先手取了 \$x<2^{k+1}\$ 颗石子,那么后手直接取 \$\text{lowbit}(x)\$ 颗石子,我们已经证明了先手不能取 \$\le\text{lowbit}(x)\$ 颗石子,而先手又没有其 它选择,因此这样必败。假如先手取 \$2^{k+1}\$ 颗石子,后手也同样取 \$2^{k+1}\$ 颗石子,这样到最 后先手还是会输。

这样一来结论就简单了。假如石子个数是 \$2\$ 的幂,那么先手必败,因为后手可以取 \$\text{lowbit}\$□否则先手取 \$\text{lowbit}\$即可。

例题

来源□Part I, 1.5.7.b-Ferguson

题目大意:和上一题大体相同,但是至多可以取上一次取的数量的两倍。

题解:首先介绍斐波那契进制,即将一个正整数表示为若干不相邻的斐波那契数之和,可以证明这样的表示是存在且唯一的。

设当前数的斐波那契进制表示为 \$a {1}+\cdots+a {n},a {1}>\cdots>a {n}\$□

假如 \$n=1\$□和刚刚相同可证得先手必败。

例题

来源「Part I, 1.5.8-Ferguson, 2017 ECL-Final L

题目大意:一个 \$1\times n\$ 的格子,每次往一个空格子中填入 S 或 0,先填出 S0S 的胜。问胜负情况。

题解:我们称一个格子是好的,当且仅当其中填入 S 和 0 都将导致后手胜利。容易证明,这样的格子只会在 S**S 中出现。因此好格子是成对出现的,即最后只剩下好格子时,一定是偶数个。假如 \$n\$ 是偶数,那么先手负,否则后手负。另外还需要证明对方一定能摆出好格子。

若 \$n\$ 为偶数,且 \$n\ge16\$□假如先手摆 S,后手可直接摆出。否则先手摆 O,那么一定有一边有至少 \$8\$ 个格子,后手在该侧离边界 \$3\$ 个格子的地方摆 S,即 SXXX 或 XXXS□X 表示空格子)。如果先手在远离边界的一侧摆,那么后手也可以直接填出。如果先手在边界一侧摆,后手就可以在另一侧摆出 S**S,由于第一回合先手摆了 O,因此这样填不会陷入非法状态(注意如果先手先填 S则不能保证)。

若 \$n\$ 为奇数,且 \$n\ge7\$□先手在中间摆 S,不论后手什么操作,先手在另一侧填即可。

暴搜可以证明其它时候都是平局□\$n=14\$的一个证明可以参见 Ferguson 的习题答案。

□ang 怎么出原题的啊

https://wiki.cvbbacm.com/ Printed on 2025/11/29 19:21

2025/11/29 19:21 3/3 例题

Nim-k 博弈

把 Nim 游戏的规则修改一下,每次可以取 \$k\$ 堆。那么负态的条件是,所有堆数各个二进制位的和模 \$k\$ 都为 \$0\$。

SG 定理

证明:假如当前异或和为\$0\$,不论先手如何操作,都会恰改变一个\$\text{sg}\$□因此异或和变为非\$0\$。

假如当前异或和不为 \$0\$。考虑异或和的最高位,一定有某个 \$\text{sg}\$ 该位为 \$1\$,该 \$\text{sg}\$ 异或上异或和后一定变小,从而先手可以进行这样的操作,并转换成负态。

SJ 定理

定义使得所有 \$\text{sg}\$ 变为 \$0\$ 的人负(即使原游戏还可以进行操作)。证明胜态为:

- 若异或和为 \$0\$, 所有 \$\text{sq}\le1\$
- 若异或和不为 \$0\$, 至少有一个 \$\text{sg}>1\$

证明□

- 对于胜态:
 - 若所有 \$\text{sg}\$ 为 \$0\$,已经成立。
 - 否则若异或和为 \$0\$, 又至少有一个 \$1\$, 把 \$1\$ 变成 \$0\$ 即可。
 - 若异或和不为 \$0\$, 若有至少两个 \$\text{sg}>1\$□那么按照 \$\text{SG}\$ 定理行动即可。这样之后,至少还有一个 \$\text{sg}>1\$□因此是负态。若只有一个 \$\text{sg}>1\$□那么按照奇偶性决定将它变成 \$1\$ 还是变成 \$0\$。
- 对于负态:
 - 若异或和为 \$0\$, 则至少有**两个** (不可能是一个□\$\text{sg}>1\$□不论怎么操作,异或和会变为非 \$0\$, 而 $$\text{text}\{sg\}>1$$ 的至少还有一个,因此是胜态。
 - 若异或和不为 \$0\$,则所有 \$\text{sg}\le1\$□把 \$0\$ 变成 \$1\$ 或 \$1\$ 变成 \$0\$ 均为胜态。而如果把某个 \$\text{sg}\$ 变成 \$>1\$,由于只有一个 \$>1\$,异或和不为 \$0\$,因此还是胜态。

From

https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Permanent link

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidsword:zhongzihao:games&rev=1618549023

Last update: 2021/04/16 12:57