

## 例题

来源□Part I, 1.5.3-Ferguson

题目大意：有一堆  $31$  颗的石子，每次可以取  $1 \sim 6$  颗，但是每种数量至多取  $4$  次。问胜负情况。

题解：不妨先不考虑  $4$  个的限制。这个比较简单，模  $7$  余  $0$  的状态是负态。然而如果先手按这种策略操作，只要后手一直取  $4$ ，先手最后一轮将无  $3$  可用。

事实上，先手先取  $5$  仍可保证取胜。如果后手一直也取  $5$ ，先手取  $2$  来应对。取了  $4$  个  $5$  和  $3$  个  $2$  后，还剩  $5$  个，此时已经不能再取  $5$  了，因此后手不论怎么取都会输。如果后手某一回合不取  $5$  了，先手可以立即转移到模  $7$  余  $0$  的状态，可以验证这时不论如何先手不会没东西可用，因为开始的若干操作拖延了一回合。

## 例题

来源□Part I, 1.5.5-Ferguson

题目大意：有两堆石子，每次操作可以将某堆石子清空，然后把剩下的一堆石子分成两个非空的堆。问胜负情况。

题解：如果两堆石子都是奇数，那么先手负，否则先手胜。如果至少有一堆石子是偶数，那么我们可以把这堆石子拆成两个奇数堆，从而转移到负态。而如果两堆石子都是奇数个，显然拆出来至少有一个偶数。

## 例题

来源□Part I, 1.5.6-Ferguson

题目大意：给你一个矩形网格，每次选取一个格子，将该格子右上方的部分删除，删掉左下角格子的玩家输。证明除  $1 \times 1$  外，先手必胜。

题解：假如删掉右上角的格子后是负态，那么命题已经成立。否则后手一定可以进行某种操作转移到一个负态，而容易发现这个操作先手同样可以完成。

## 例题

来源□Part I, 1.5.7.a-Ferguson

题目大意：有一堆  $n$  颗的石子，先手可以任意取，但是不能取完，之后每个人至多只能取上一次取的数量。问胜负情况。

题解：我们首先归纳地证明，对于每个  $k \geq 0$  如果当前石子数能被  $2^{k+1}$  整除，且至少能拿  $2^k$  个石子，那么当前这个人不会取  $\leq 2^k$  个石子。

$k=0$  时显然，如果先手只拿  $1$  个，那么之后所有人都只能拿  $1$  个石子，显然先手就输了。

假设  $\leq k$  时成立□ $k+1$  时，假如先手取了  $x < 2^{k+1}$  颗石子，那么后手直接取  $\text{lowbit}(x)$  颗石子，我们已经证明了先手不能取  $\leq \text{lowbit}(x)$  颗石子，而先手又没有其它选择，因此这样必败。假如先手取  $2^{k+1}$  颗石子，后手也同样取  $2^{k+1}$  颗石子，这样到最

后先手还是会输。

这样一来结论就简单了。假如石子个数是  $2^k$  的幂，那么先手必败，因为后手可以取  $\text{lowbit}$  否则先手取  $\text{lowbit}$  即可。

## 例题

来源 Part I, 1.5.7.b-Ferguson

题目大意：和上一题大体相同，但是至多可以取上一次取的数量两倍。

题解：首先介绍斐波那契进制，即将一个正整数表示为若干不相邻的斐波那契数之和，可以证明这样的表示是存在且唯一的。

设当前数的斐波那契进制表示为  $a_1 + \dots + a_n, a_1 > \dots > a_n$

假如  $n \geq 2$  那么先手可以删掉  $a_n$  由于  $a_{n-1} > 2a_n$  因此后手不能一次取完。我们来证明后手不论怎么取，仍然会回到刚刚的情况。假设后手取完后  $a_{n-1}$  变为了  $b_1 + \dots + b_m = a_{n-1} - x$  我们想要证明  $2x \geq b_m$  采用反证法，假设  $2x < b_m$  这样  $x$  的斐波那契进制表示必然和  $b_{m-1}$  不相邻，从而  $a_{n-1} = b_1 + \dots + b_{m-1} + x$  这样就与  $a_{n-1}$  的斐波那契进制表示唯一矛盾了。

假如  $n=1$  和刚刚相同可证得先手必败。

## 例题

来源 Part I, 1.5.8-Ferguson, 2017 ECL-Final L

题目大意：一个  $1 \times n$  的格子，每次往一个空格子中填入 S 或 0，先填出 SOS 的胜。问胜负情况。

题解：我们称一个格子是好的，当且仅当其中填入 S 和 0 都将导致后手胜利。容易证明，这样的格子只会在  $S^*S$  中出现。因此好格子是成对出现的，即最后只剩下好格子时，一定是偶数个。假如  $n$  是偶数，那么先手负，否则后手负。另外还需要证明对方一定能摆出好格子。

若  $n$  为偶数，且  $n \geq 16$  假如先手摆 S，后手可直接摆出。否则先手摆 0，那么一定有一边有至少 8 个格子，后手在该侧离边界 3 个格子的地方摆 S，即 SXXX 或 XXXS (X 表示空格子)。如果先手在远离边界的一侧摆，那么后手也可以直接填出。如果先手在边界一侧摆，后手就可以在另一侧摆出  $S^*S$ ，由于第一回合先手摆了 0，因此这样填不会陷入非法状态（注意如果先手先填 S 则不能保证）。

若  $n$  为奇数，且  $n \geq 7$  先手在中间摆 S，不论后手什么操作，先手在另一侧填即可。

暴搜可以证明其它时候都是平局  $n=14$  的一个证明可以参见 Ferguson 的习题答案。

怎么出原题的啊

## Nim-k 博弈

把 Nim 游戏的规则修改一下，每次可以取  $k$  堆。那么负态的条件是，所有堆数各个二进制位的和模  $k$  都为  $0$ 。

## SG 定理

证明：假如当前异或和为  $0$ ，不论先手如何操作，都会恰改变一个  $\text{sg}$  因此异或和变为非  $0$ 。

假如当前异或和不为  $0$ 。考虑异或和的最高位，一定有某个  $\text{sg}$  该位为  $1$ ，该  $\text{sg}$  异或上异或和后一定变小，从而先手可以进行这样的操作，并转换成负态。

## SJ 定理

定义使得所有  $\text{sg}$  变为  $0$  的人负（即使原游戏还可以进行操作）。证明胜态为：

- 若异或和为  $0$ ，所有  $\text{sg} \leq 1$
- 若异或和不为  $0$ ，至少有一个  $\text{sg} > 1$

证明

- 对于胜态：
  - 若所有  $\text{sg}$  为  $0$ ，已经成立。
  - 否则若异或和为  $0$ ，又至少有一个  $1$ ，把  $1$  变成  $0$  即可。
  - 若异或和不为  $0$ ，若有至少两个  $\text{sg} > 1$  那么按照  $\text{SG}$  定理行动即可。这样之后，至少还有一个  $\text{sg} > 1$  因此是负态。若只有一个  $\text{sg} > 1$  那么按照奇偶性决定将它变成  $1$  还是变成  $0$ 。
- 对于负态：
  - 若异或和为  $0$ ，则至少有两个（不可能是一个  $\text{sg} > 1$  不论怎么操作，异或和会变为非  $0$ ，而  $\text{sg} > 1$  的至少还有一个，因此是胜态。
  - 若异或和不为  $0$ ，则所有  $\text{sg} \leq 1$  把  $0$  变成  $1$  或  $1$  变成  $0$  均为胜态。而如果把某个  $\text{sg}$  变成  $> 1$ ，由于只有一个  $> 1$ ，异或和不为  $0$ ，因此还是胜态。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepid:zhongzihao:games&rev=1618549023>

Last update: 2021/04/16 12:57