A. Circle Coloring

签到题。

B. Arrays Sum

不 FST 就是签到题。

C. Discrete Acceleration

签到题。

D. Searchlights

签到题。

E. Avoid Rainbow Cycles

题目大意：给你 m 个集合，每个集合有若干 $1\sim n$ 的元素，删除某个元素需要耗费一定的代价。删除后，对第 i 个集合中的元素，两两连一条颜色为 i 的边。要求该图中不存在一个环使得环中所有边颜色相同。求最小代价。

题解：将集合编号 i 和其中的元素 j 连边，得到一个二分图。注意到一个环同时也是二分图中的一个环，那么显然需要求二分图的一棵最大生成森林。

F. Two Different

题目大意：设有函数 $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，给你一个长度为 $n\le1.5\times10^{4}$ 的数列 $a_{i}=i$，允许进行 $q\le5\times10^{5}$ 次操作，每次操作选择下标 x,y，令 $a_{x}:=a_{y}:=f(x,y)$，要求给出一个操作序列，对于任意的 f 均可使得操作完后 a 数组中元素不超过 2 种。

题解：容易发现，使用 FFT 的技巧可使一长度为 2 的幂的数组变得相等，而使用 ST 表的技巧即可使得元素数量不超过 2。

G. Clusterization Counting

题目大意：给你一个完全图，所有边的边权互异。现在将图划分成若干个团，要求每个团内部的边权严格小于它里面的点连到外面的边权。求对每个 x，求划分为 x 个团的方案数。

题解：假设一个团的最大边权为 x□将所有 $\le x$ 的边连起来，考虑 x 所在的连通块，所有的点必须包含，否则会导致非法。而其它连通块的点则不得包含，否则会导致该连通块的最大边权超过 x□那么只要 x 所在的连通块是一个团即合法，而我们的目标是将原图划分成若干个这样的团。这个也比较简单，从小到大加边，如果两个连通块合并，乘一下 dp 数组，如果一个连通块变成了团，那么方案数加 1。

H. Rainbow Triples

题目大意：给出 n 个整数 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$□要求你找出 m 个三元组 $\{(u_{i},v_{i},w_{i})\}$□使得 $a_{u_{i}}=a_{w_{i}}=0$□$a_{v_{i}}>0$□$u_{i}<v_{i}<w_{i}$□所有 $a_{v_{i}}$ 互异，所有 u_{i},v_{i},w_{i} 互异。求 m 的最大值。

题解：将所有非零的数分为左部 L 和右部 R□其中 L 中的数是那些左侧 0 比右侧 0 少的数，反之亦然。注意到，对于所有 L 中的点，不论左侧怎么匹配，它都能找到一个右侧的点来匹配，反之亦然。下文称非零的 a_{i} 值为颜色。对于同种颜色且同在 L 中的点，设 $u_{1}<u_{2}$□那么假如 u_{1} 能匹配□u_{2} 也能匹配。也就是说，对于同种颜色，我们只需要保留 L 中最右的点及 R 中最左的点，且对 L 中的点，我们只关心能否在它左侧找一个点匹配□R 同理。那么我们把所有颜色看做左部，所有 0 看做右部，每个左部的点连向了右部的一段前缀和一段后缀。注意这个图很特殊，我们将右部的 L 和 R 交换，可以发现所有的前缀和后缀就拼在一起变成了一个区间，而这种二分图是很容易贪心求最大匹配的。最后求得的答案可能大于 $\frac{\text{cnt}_{0}}{2}$□需要注意特判。

I. Bitwise Magic

题目大意：给你 n 个互异整数，它们都在 $k\sim2^{c}-1$ 之间。现在进行 k 次操作，每次等概率随机将其中一个数减 1。求期望异或值□$1\le k,c\le 16$□

题解：朴素的想法是直接 dp□$dp[i][j]$ 表示异或和为 i□已经减了 j 次的方案数。但是复杂度是 $2^{2c}k^{2}$□注意到 k 很小，因而大部分的数在减的时候只会影响低几位，而不会影响高位。具体来说，只影响低 i 位的数大约有 $2^{c-i+\log k}$ 个。

考虑在线段树上 dp□设某个节点代表的区间为 $[l,r]$□我们只考虑那些在 $[l+k,r]$ 中的数，这样所有的数即使减了 k□前缀一定还是 $l\land r$□考虑合并两个结点的时候如何合并 dp 数组。对于右孩子的 dp□若它已经处理的数有奇数个，那么 dp 数组的 i 需要整体加一个前缀 1。合并时则可简单地把 dp 数组视为集合幂级数，用 FWT 处理。注意到还需要加入 $[r,r+k-1]$ 中的数，这些都可以分别用 FWT 处理。

合并左右子树的复杂度为 $\sum_{i=0}^{c-1}2^{i}\cdot k^{2}\cdot 2^{c-i}=2^{c}ck^{2}$□加入新数的复杂度为 $\sum_{i=0}^{c-1}2^{c-i+\log k}\cdot 2^{i}\cdot k^{2}=2^{c}ck^{3}$□因而总复杂度为 $\mathcal{O}(2^{c}ck^{3})$□