Lyndon 分解学习

首先介绍 Lyndon 串。设有串 w□若对于所有 $w=uv,u,v\neq\varepsilon$□有 $w<vu$□称该串为 Lyndon 串。

性质 1

Lyndon 串不存在一个真子串，既是前缀又是后缀。

证明：设 u 是这样的一个串，那么 $w=uv'$ 且 $w=v''u$□那么由定义我们有 $w<v'u$ 且 $w<uv''$□因此 $uv'<uv''$ 且 $v''u<v'u$□那么 $v'<v''$ 且 $v''<v'$□矛盾。

性质 2

串 w 是 Lyndon 串，当且仅当所有真后缀 v 满足 $w<v$□

证明：若对所有 v 满足 $w<v$□设 $w=uv$□由于 $uv<v$□因此 $uv<vu$□

若串 w 是 Lyndon 串，由于 $uv<vu$□且根据性质 1□v 不是 w 的前缀，因此 $uv<v$□

性质 3

设有 Lyndon 串 u,v□uv 是 Lyndon 串当且仅当 $u<v$□

证明：若 uv 是 Lyndon 串，根据性质 2□$u<uv<v$□

若 $u<v$□设 s 是 uv 的一个真后缀，那么 $s=u'v$□$s=v$ 或 $s=v'$□其中 u',v' 是 u,v 的真后缀。

对于第一种情况□$u<u'$□且 u 不是 u' 的前缀，因此 $uv<u'v$□

对于第二种情况，若 u 不是 v 的前缀，由于 $u<v$□因此 $uv<v$□

若 u 是 v 的前缀，那么有 $v=uv''$□其中 v'' 是 v 的一个真后缀。因此 $v<v''$□$uv<uv''=v$□

总而言之□$uv<v$□

对于第三种情况□$uv<v<v'$□

性质 4

设有 Lyndon 串 u,v□$u<v$□对于任何 $k_{1},k_{2}\ge1$ 有 $u^{k_{1}}v^{k_{2}}$ 是 Lyndon 串。

证明：归纳法可证明 $u^{k_{1}}v$ 是 Lyndon 串。而由于 v 是 $u^{k_{1}}v^{k'_{2}}$ 的后缀，因而 $u^{k_{1}}v^{k'_{2}+1}$ 仍是 Lyndon 串。

性质 5

设 $u\in A^{*}$□$v\in A^{+}$□uv 是 Lyndon 串。若 $a\in A$□且 $v<a$□那么 ua 是 Lyndon 串。

题解□$u=\varepsilon$ 时显然。

设 $s=u'a$ 是 ua 的一个真后缀。已知 $uv<u'v<u'a$□因此 u 显然不是 $u'a$ 的前缀。那么有 $ua<u'v<u'a$□

论文 19 页，太长了，有缘再见 :)