

## Lyndon 分解学习

首先介绍 Lyndon 串。设有串  $w$  若对于所有  $w=uv, u, v \neq \epsilon$  有  $w < vu$  称该串为 Lyndon 串。

### 性质 1

Lyndon 串不存在一个真子串，既是前缀又是后缀。

证明：设  $u$  是这样的一个串，那么  $w=uv$  且  $w=v'u$  那么由定义我们有  $w < v'u$  且  $w < uv$  因此  $uv < uv$  且  $v'u < v'u$  那么  $v' < v$  且  $v' < v$  矛盾。

### 性质 2

串  $w$  是 Lyndon 串，当且仅当所有真后缀  $v$  满足  $w < v$

证明：若对所有  $v$  满足  $w < v$  设  $w=uv$  由于  $uv < v$  因此  $uv < vu$

若串  $w$  是 Lyndon 串，由于  $uv < vu$  且根据性质 1  $v$  不是  $w$  的前缀，因此  $uv < v$

### 性质 3

设有 Lyndon 串  $u, v$   $uv$  是 Lyndon 串当且仅当  $u < v$

证明：若  $uv$  是 Lyndon 串，根据性质 2  $u < uv < v$

若  $u < v$  设  $s$  是  $uv$  的一个真后缀，那么  $s=u'v$  或  $s=v$  其中  $u', v'$  是  $u, v$  的真后缀。

对于第一种情况  $u < u'$  且  $u$  不是  $u'$  的前缀，因此  $uv < u'v$

对于第二种情况，若  $u$  不是  $v$  的前缀，由于  $u < v$  因此  $uv < v$

若  $u$  是  $v$  的前缀，那么有  $v=uv'$  其中  $v'$  是  $v$  的一个真后缀。因此  $v < v'$   $uv < uv' = v$

总而言之  $uv < v$

对于第三种情况  $uv < v < v'$

### 性质 4

设有 Lyndon 串  $u, v$   $u < v$  对于任何  $k_1, k_2 \geq 1$  有  $u^{k_1}v^{k_2}$  是 Lyndon 串。

证明：归纳法可证明  $u^{k_1}v$  是 Lyndon 串。而由于  $v$  是  $u^{k_1}v^{k_2}$  的后缀，因而  $u^{k_1}v^{k_2+1}$  仍是 Lyndon 串。

## 性质 5

设  $u \in A^*$  且  $v \in A^+$  且  $uv$  是 Lyndon 串。若  $a \in A$  且  $v < a$  那么  $ua$  是 Lyndon 串。

题解  $u = \varepsilon$  时显然。

设  $s = ua$  是  $ua$  的一个真后缀。已知  $uv < u'v < u'a$  因此  $u$  显然不是  $ua$  的前缀。那么有  $ua < u'v < u'a$

论文 19 页，太长了，有缘再见 :)

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:lyndon\\_factorization](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:lyndon_factorization)

Last update: 2020/09/13 22:04

