152. Writing 1/2 as a sum of inverse squares

题目大意：问有多少种方式将 $\frac{1}{2}$ 表示成 $2\sim80$ 之间的不同数的倒数平方和。

题解：感觉除了暴力没啥好的性质。首先将所有倒数平方乘上 $\text{lcm}(2^{2},\cdots,80^{2})$，就转成了一个 meet-in-middle 问题。但是将近 80 个数太多了。不知道为什么就发现了有很多数是不可能选取的。具体来说，选取 lcm 的一个小约数，你会发现大部分的元素模它为 0，对于模它不为 0 的所有元素，直接 2^{n} 枚举一下组合，然后就会发现有些数永远不能出现在组合中，否则就没法凑出 0。~~随便选一些~~（其实是有一些规律的）约数筛完后，就只剩下 30 多个可选的元素了。

195. Inscribed circles of triangles with one angle of 60 degrees

题目大意：大约是要求 $a^{2}-ab+b^{2}=c^{2}$ 的正整数解。

题解：部分这样的三元二次齐次不定方程有很漂亮的解法。

$$ \begin{aligned} &|a-b\omega|^{2}\\ =&|a-\frac{b}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{2}i|\\ =&a^{2}-ab+b^{2} \end{aligned} $$

其中，$\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，为 $\omega^{3}+1=0$ 的解。

$$ \begin{aligned} &(a^{2}-ab+b^{2})^{2}\\ =&|a-b\omega|^{4}\\ =&|a^{2}-2ab\omega+b^{2}\omega^{2}|^{2}\\ =&|a^{2}-b^{2}-(2ab-b^{2})\omega|^{2}\\ =&(a^{2}-b^{2})^{2}-(a^{2}-b^{2})(2ab-b^{2})+(2ab-b^{2})^{2} \end{aligned} $$

枚举 a,b 即可得到通解（不会证充分性）。

251. Cardano Triplets

题目大意：求满足 $a+b+c\le n$，$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}=1$ 的正整数 (a,b,c) 数量。

题解：不妨设 $a+b\sqrt{c}=(\frac{1}{2}+t\sqrt{c})^{3}$，则 $a-b\sqrt{c}=(\frac{1}{2}-t\sqrt{c})^{3}$，因此有：

$$ \frac{1}{8}+\frac{3}{4}t\sqrt{c}+\frac{3}{2}t^{2}c+t^{3}c\sqrt{c}=a+b\sqrt{c}\\ \frac{1}{8}-\frac{3}{4}t\sqrt{c}+\frac{3}{2}t^{2}c-t^{3}c\sqrt{c}=a-b\sqrt{c}\\ $$

两式相加、相减得

$$ \frac{1}{8}+\frac{3}{2}t^{2}c=a\tag{1} $$

$$ \frac{3}{4}t+t^{3}c=b\tag{2} $$

由式 1 可得 t^{2} 是有理数，由式 2 可得 t 是有理数。不妨设 c 无平方因子，那么显然 t 应该有 $\frac{2k+1}{2}(k\in\mathbb{Z})$ 的形式。枚举 c,t 即可。

278. Linear Combinations of Semiprimes

$2pqr-pq-pr-qr$□

291. Panaitopol Primes

题目大意：设 $x,y\in\mathbb{N}^{+}$□$p=\frac{x^{4}-y^{4}}{x^{3}+y{3}}$□求所有 $\le n$ 且为质数的 p 的和。

题解□

$$ \begin{aligned} p&=\frac{(x^{2}+y^{2})(x-y)}{x^{2}-xy+y^{2}}\\ p(x^{2}-xy+y^{2})&=(x^{2}+y^{2})(x-y) \end{aligned} $$

因为 p 是质数，所以 $p\mid(x-y)$ 或 $p\mid(x^{2}+y^{2})$□若 $p\mid(x-y)$□那么 $(x^{2}+y^{2})\mid(x^{2}-xy+y^{2})$□矛盾。因此 $p\mid(x^{2}+y^{2})$□$(x-y)\mid (x^{2}-xy+y^{2})$□易得 $(x-y)\mid x^{2}$□$(x-y)\mid xy$□$(x-y)\mid y^{2}$□设 $x^{2}=a(x-y)$□$xy=b(x-y)$□$y^{2}=c(x-y)$□由于 $(x-y)^{2}=a(x-y)-2b(x-y)+c(x-y)$□因此 $(x-y)=a+c-2b$□又由于 $x^{2}y^{2}=ac(x-y)^{2}=b^{2}(x-y)^{2}$□因此 $ac=b^{2}$□故

$$ \begin{aligned} p&=\frac{(a+c)(x-y)^{2}}{(a+c-b)(x-y)}\\ &=\frac{(a+c)(a+c-2b)}{a+c-b} \end{aligned} $$

设 $g=\gcd(a,b,c)$□有

$$ \begin{aligned} p=g\frac{(a'+c')(a'+c'-2b')}{a'+c'-b'} \end{aligned} $$

不妨设**质数** $q\mid\gcd(a'+c'-2b',a'+c'-b')$□那么 $q\mid b'$□又因为 $a'c'=b'^{2}$□因此 $q\mid a'$ 或 $q\mid c'$□从而 $q\mid a',b',c'$□矛盾。同理 $\gcd(a'+c',a'+c'-b')=1$□因此 $(a'+c'-b')|g$□要使 p 为质数，必然有 $a'+c'-2b'=1$ 以及 $g=a'+c'-b'$□联立 $a'c'=b'^{2}$□可得 $\sqrt{a'}-\sqrt{c'}=1$□因此 $p=a'+c'$ 有 $p=n^{2}+(n+1)^{2}(n\in\mathbb{N}^{+})$ 的形式。

319. Bounded Sequences

题目大意：定义整序列 $\{x_{n}\}$ 满足要求当且仅当：

- $x_{1}=2$
- $\forall 1<i\le n$□$x_{i-1}<x_{i}$
- $\forall 1\le i,j\le n$□$x_{i}^{j}<(x_{j}+1)^{i}$

定义 $f(n)$ 表示长度为 n 的满足要求的序列的数量，求 $f(10^{10})$□

题解□

$$ \begin{aligned} x_{i}^{j}&<(x_{j}+1)^{i}\\ j\ln x_{i}&<i\ln(x_{j}+1)\\ \frac{\ln x_{i}}{i}&<\frac{\ln(x_{j}+1)}{j} \end{aligned} $$

那么序列合法，当且仅当 $\exists t$ 使得 $\forall i,\frac{\ln x_{i}}{i}\le t<\frac{\ln(x_{i}+1)}{i}$即 $e^{it}-1<x_{i}\le e^{it}$那么 $x_{i}=\lfloor e^{it}\rfloor$令 $i=1$ 可得 $\ln2\le t<\ln3$

注意到 e^{it} 关于 t 连续且单调递增，考虑 t 从 $\ln2$ 增加到 $\ln3$ 的过程，显然只有 $\exists i$ 使得 e^{it} 为整数的 t 才会产生一个新的序列。

设 $t=\frac{\ln z}{d}$$z=\prod_{j=1}^{e}p_{j}^{s_{j}}$且 $\gcd(s_{1},\cdots,s_{e},d)=1$那么 e^{it} 为整数，当且仅当 $d|i$$e^{it}=\prod_{j=1}^{e}p_{j}^{\frac{is_{j}}{d}}$若 $i\nmid d$就有 $\frac{d}{\gcd(i,d)}|s_{j}$矛盾。

不妨设 $g(m)$ 为 $0\le t<m$ 的 t 的数量，则答案为 $g(\ln3)-g(\ln2)$考虑枚举 d

$$ \begin{aligned} g(m)&=\sum_{d=1}^{n}\sum_{u\mid d}\mu(u)(e^m)^{\frac{d}{u}}\\ &=\sum_{d=1}^{n}\sum_{u\mid d}\mu(\frac{d}{u})(e^m)^{u}\\ &=\sum_{u=1}^{n}e^{mu}\sum_{u=1}^{\lfloor\frac{n}{u}\rfloor}\mu(u)\\ \end{aligned} $$

然后杜教筛就可以 $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$ 解决啦。

443. GCD sequence

题目大意：设 $f(4)=13,f(n)=f(n-1)+\gcd(n,f(n-1))(n\ge5)$求 $f(10^{15})$

题解：可以猜测会有大段连续的 1。如果 $\gcd(n,f(n-1))=1$那么下一个合法的位置应该和 $f(n-1)-n$ 不互质，随便算算就好。实际只需要迭代几百次（很可能中间有一个大质数）。

479. Roots on the Rise

题目大意：设 a_{k},b_{k},c_{k} 是方程 $\frac{1}{x}=(\frac{k}{x})(k+x^{2})-kx$ 的三根，求 $\sum_{k=1}^{10^{6}}\sum_{p=1}^{10^{6}}(a_{k}+b_{k})^{p}(b_{k}+c_{k})^{p}(c_{k}+a_{k})^{p}$

题解：方程化简为 $x^{3}-kx^{2}+\frac{1}{k}x-k^{2}=0$注意到 $(a_{k}+b_{k})(b_{k}+c_{k})(c_{k}+a_{k})=(a_{k}+b_{k}+c_{k})(a_{k}b_{k}+b_{k}c_{k}+c_{k}a_{k})-a_{k}b_{k}c_{k}=1-k^{2}$等比数列求和一下就好了。似乎很多情况下轮换对称式都能用根与系数的关系来表示呢。

488. Unbalanced Nim

题目大意：给你三堆石子，每堆石子的数量互不相同，两人轮流取走石子，每次可以选择一堆，从中取走一个以上的石子，要求取完之后仍要满足每堆石子的数量互不相同，最后不能操作者输。设三堆石子的数量分别为 a,b,c设 $F(n)$ 表示满足 $0<a<b<c<n$ 的所有负态的 $(a+b+c)$ 之和，求 $F(10^{18})\mod10^{9}$

题解：先来研究负态满足的条件：

手动打表可以发现，负态为所有满足 $i\ge 0, 0\le j<2^{i},k\ge1,0\le u<2^{i}$ 的 $(2^{i}+j-1,2^{i+1}k+u-1,2^{i+1}k+2^{i}+(j\oplus u)-1)$为了方便证明，不妨将三个数都加上$1$,

并稍微改写一下式子，得到：负态为所有满足 $i\ge 0, 0\le j<2^{i},k\ge1,0\le u<2^{i}$ 的 $(2^{i}+(j\oplus u),2^{i+1}k+j,2^{i+1}k+2^{i}+u)$□这等价于下面的叙述：设 $a,b,c(a<b<c)$ 的无前导 0 二进制表示分别为 $a=a'_{n_{a}}\cdots a'_{0},b=b'_{n_{b}}\cdots b'_{0},c=c'_{n_{c}}\cdots c'_{0}$□$b$ 和 c 最高的不相同的位为第 i 位，则 (a,b,c) 为负态的充要条件为□$n_{b}=n_{c}$□且 $a=b\oplus c$□下面我们用归纳法来证明这一结论：

显然 $(1,2,3)$ 为负态，且满足上面的要求。

先证明不满足上面形式的状态是胜态：

- 若 $n_{b}<n_{c}$
  - 若 $n_{a}=n_{b}$□则 $(a\oplus b,a,b)$ 是一个负态。
  - 若 $n_{a}<n_{b}$
    - 若 $b'_{n_{a}}=1$□则 $(a,a\oplus b,b)$ 是一个负态。
    - 若 $b'_{n_{a}}=0$□则 $(a,b,a\oplus b)$ 是一个负态。
- 若 $n_{b}=n_{c}$
  - 若 $a>b\oplus c$□则 $(b\oplus c,b,c)$ 是一个负态。
  - 若 $a<b\oplus c$
    - 若 $n_{a}<i$
      - 若 $b'_{n_{a}}=1$□则 $(a,a\oplus b,b)$ 是一个负态。
      - 若 $b'_{n_{a}}=0$□则 $(a,b,a\oplus b)$ 是一个负态。
    - 若 $n_{a}=i$□我们来证明 $a\oplus c<b$ 和 $a\oplus b<c$ 至少有一个成立：

设 a 和 $b\oplus c$ 最高的不相同的位为第 j 位，则有 $(a'_{n_{c}}\oplus c'_{n_{c}})\cdots(a'_{j+1}\oplus c'_{j+1})=b'_{n_{c}}\cdots b'_{j+1}$ 和 $(a'_{n_{b}}\oplus b'_{n_{b}})\cdots(a'_{j+1}\oplus b'_{j+1})=c'_{n_{b}}\cdots c'_{j+1}$ 均成立。又因为 $a<b\oplus c$□所以有 $a'_{j}=0,b'_{j}\oplus c'_{j}=1$□故 $a'_{j}\oplus c'_{j}<b'_{j}$ 和 $a'_{j}\oplus b '_{j}<c'_{j}$ 至少有一个成立，即 $a\oplus c<b$ 和 $a\oplus b<c$ 至少有一个成立□$\Box$

- 若 $a\oplus c<b$□则 $(a,a\oplus c,c)$ 是一个负态。

- 若 $a\oplus b<c$□则 $(a,b,a\oplus b)$ 是一个负态。

再证明满足上面形式的状态是负态：

- 若从 a 中取石子，由于 a 是由 b,c 唯一确定的，故取走 a 中石子后肯定是胜态。
- 若从 b 中取石子
  - 若取完后 b 的位数小于 c 的位数，显然最大的两个数的位数不可能相等，也是一个胜态。
  - 若取完后 b 的位数等于 c 的位数，根据异或运算的性质□b 和 c 的异或值肯定发生了变化□a 也肯定不满足负态的要求。
- 若从 c 中取石子，与 b 类似可证□$\Box$

最后的答案可以通过一个简单的数位 dp 得到，这里就不再赘述了。

545. Faulhaber’s Formulas

Von Staudt–Clausen theorem

581. 47-smooth triangular numbers

Størmer’s theorem

613. Pythagorean Ant

题目大意：有一个边长 $3,4,5$ 的三角形，一只蚂蚁等概率随机地在三角形中一点，然后等概率选择一个方向沿射线走。问穿过斜边的概率。

题解：其实就是个二重积分，但是第二重好像很恶心的样子，所以就只积了一重，第二重数值积分：

$$ \begin{aligned} &\int\pi-\arctan\frac{3-y}{x}+\arctan\frac{y}{4-x}\mathrm{d}y\\ =&\pi y+x\left[\frac{3-y}{x}\arctan\frac{3-y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+(\frac{3-y}{x})^{2}\right)\right]+\\ &(4-x)\left[\frac{y}{4-x}\arctan\frac{y}{4-x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+(\frac{y}{4-x})^{2}\right)\right]+C \end{aligned} $$

我爱 python□我爱 scipy□

622. Riffle Shuffles

题目大意：设排列 $p=(0,n,1,n+1,2,n+2,\cdots,n-1,2n-1)$□求出所有使得最小循环节为 60 的 $2n$ 之和。

题解：显然 p 与 p^{-1} 的循环节长度相同□$p^{-1}=(0,2,4,\cdots,2n-2,1,3,5,\cdots,2n-1)$□注意到除了 $2n-1$ 之外，满足 $p^{-1}(x)=2x\mod(2n-1)$□但是 $2n-1$ 本身即成一个环，可以不用考虑。算一算可以发现，最小循环节长度即为最小的使得 $2^{x}\equiv1\pmod{2n-1}$ 的 x□要使最小循环节为 60，那么要有 $2n-1\mid2^{60}-1$□$2n-1\nmid2^{30}-1$□$2n-1\nmid2^{20}-1$□$2n-1\nmid2^{12}-1$□稍微算一下即可。

624. Two heads are better than one

题目大意：随机抛一枚硬币，当出现两次正面时停止。设 $P(n)$ 表示停止时抛硬币的次数能被 n 整除的概率，求 $P(10^{18})\mod(10^{9}+9)$□

题解：设 $f_{H}(x),f_{T}(x)$ 表示当前未结束，且结尾为 H 或 T 的概率□$f_{HH}(x)$ 表示当前已经结束的概率。那么可以写出生成函数方程：

$$ \begin{aligned} f_{HH}(x)&=\frac{1}{2}xf_{H}(x)+xf_{HH}(x)\\ f_{H}(x)&=\frac{1}{2}xf_{T}(x)+\frac{1}{2}\\ f_{T}(x)&=\frac{1}{2}x(f_{H}(x)+f_{T}(x))+\frac{1}{2}\\ \end{aligned} $$

(2) 代入 (3) 可得 $\displaystyle{f_{T}(x)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^{2}}}$□代回 (2) 可得 $\displaystyle{f_{H}(x)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^{2}}}$□代回 (1) 可得 $\displaystyle{f_{HH}(x)=\frac{\frac{1}{4}x}{(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^{2})(1-x)}}$□所求即为 $\displaystyle{(1-x)f_{HH}(x)=\frac{\frac{1}{4}x}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^{2}}}$□

因此有 $g_{0}=0,g_{1}=\frac{1}{4},g_{n}=\frac{1}{2}g_{n-1}+\frac{1}{4}g_{n-2}(n\ge2)$□可以解得特征方程的两个根为 $654248003,845752011$。从而解得通项为 $361699202\times654248003^{n}+638300807\times845752011^{n}$□最后等比数列求和一下就好了。

692. Siegbert and Jo

题目大意：一个游戏有 n 颗石子，两人轮流拿，每人最少拿一颗，最多拿上一个人拿的两倍。第一次拿没有限制。设 $f(n)$ 表示先手最少拿几颗保证必胜，求 $\sum_{k=1}^{n}f(k)$□

题解：这题出过很多次了，主要是 $f(n)$ 的定义给了我另一个视角看待这个问题□$f(n)$ 本身其实是可以直接计算的，不需要分析胜负态□$f(n)$ 即为最小的 i□使得 $2i<f(n-i)$□答案打表找规律即可。

711. Binary Blackboard

题目大意：给出一个正整数 n□并在黑板上写下 n 的二进制表示，之后先手后手轮流在黑板上写正整数的二进制表示，并保证和不超过 $2n$□不能写时游戏结束。如果 1 的数量为奇数，先手胜，否则后手胜。分析胜负态。

题解：定义 $f(n)=\text{bitcnt}(n)$□若 $\exists x+y=n$□$y=2^{f(y)}-1,f(n)+f(x)+f(y)\equiv1\pmod{2}$□那么显然先手必胜，先手写上 x 后，不论后手写什么，先手写上 y 减它即可获胜。

考虑 n 最后连续的 1 的数量 d□分类讨论（以下都是所有位不全为 1 的情况）：

- 若 d 为奇数，且**前面**存在一个偶数位 b 为 1，那么令 $x=n-2^{b}+1$□$f(n)+f(x)+f(y)=2f(n)-1-d+1+b$ 为一个奇数，因此先手胜。
- 若 d 为偶数，且**前面**存在一个奇数位 b 为 1，同理先手胜。

若全部位都为 1，后手只需把所有数拿走就可以获胜了。

剩余两种情况，不会证了。。。

- 若 d 为奇数，且**前面**所有为 1 的位均为奇数，先手胜。
- 若 d 为偶数，且**前面**所有为 1 的位均为偶数，先手负。

741. Binary grid colouring

题目大意：在一个 $n\times n$ 的网格上黑白染色，使得每行每列均恰好有两个格子是黑的，求在**旋转和对称**等价的意义下不同的方案数。

题目大意：显然需要使用 burnside 引理，总共需要计算 5 种情况，分别是无限制、旋转 $90^{\circ}/270^{\circ}$ 相同、旋转 180° 相同、沿对角线对称、水平或竖直对称。

解决这道题的关键思想是将其看做一个图的邻接矩阵（但是顺序有关系），由于每一列有 2 个黑格子，相当于每个点的度数都是 2，也就是说图是由若干个环组成的。确定好边集后，行之间还可以任意排列，但是需要注意二元环的两条边交换没有意义，故每个二元环需要除 2。总而言之，通过枚举 1 所在的环，可以列出 dp 方程：

$$ \begin{aligned} dp_i&=\sum_{j=2}^{i}\frac{A_{i-1}^{j-1}}{2}\cdot dp_{i-j}\\ &=(i-1)!\sum_{j=2}^{i}\frac{dp_{i-j}}{(i-j)!} \end{aligned} $$