

## 152. Writing 1/2 as a sum of inverse squares

题目大意：问有多少种方式将  $\frac{1}{2}$  表示成  $2 \sim 80$  之间的不同数的倒数平方和。

题解：感觉除了暴力没啥好的性质。首先将所有倒数平方乘上  $\text{lcm}(2^2, \dots, 80^2)$  就转成了一个 meet-in-middle 问题。但是将近  $80^2$  个数太多了。不知道为什么就发现了有很多数是不可能选取的。具体来说，选取  $\text{lcm}$  的一个小约数，你会发现大部分的元素模它为  $0$ ，对于模它不为  $0$  的所有元素，直接  $2^n$  枚举一下组合，然后就会发现有些数永远不能出现在组合中，否则就没办法凑出  $0$ 。随便选一些（其实是有一些规律的）约数筛选后，就只剩下  $30$  多个可选的元素了。

## 195. Inscribed circles of triangles with one angle of 60 degrees

题目大意：大约是要求  $a^2 - ab + b^2 = c^2$  的正整数解。

题解：部分这样的三元二次齐次不定方程有很漂亮的解法。

$$\begin{aligned} & |a-b|\omega^2 = |a-\frac{b}{\sqrt{3}}-\frac{b\sqrt{3}}{2}| = a^2 - ab + b^2 \end{aligned}$$

其中  $\omega = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  为  $\omega^3 + 1 = 0$  的解。

$$\begin{aligned} & (a^2 - ab + b^2)^2 = |a-b|\omega^4 \\ & = |a^2 - 2ab + b^2 + b^2\omega^2| = |a^2 - b^2 - (2ab - b^2)\omega^2| \\ & = |(a^2 - b^2)^2 - (a^2 - b^2)(2ab - b^2) + (2ab - b^2)^2| \end{aligned}$$

枚举  $a, b$  即可得到通解（不会证充分性）。

## 251. Cardano Triplets

题目大意：求满足  $a+b+c \leq n \sqrt{3} \{a+b\sqrt{c}\} + \sqrt{3} \{a-b\sqrt{c}\} = 1$  的正整数  $(a, b, c)$  数量。

题解：不妨设  $a+b\sqrt{c} = (\frac{1}{2} + t\sqrt{c})^3$  则  $a-b\sqrt{c} = (\frac{1}{2} - t\sqrt{c})^3$  因此有：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t\sqrt{c} + \frac{3}{2}t^2c + t^3c\sqrt{c} = a+b\sqrt{c} \\ & \frac{1}{8} - \frac{3}{4}t\sqrt{c} + \frac{3}{2}t^2c - t^3c\sqrt{c} = a-b\sqrt{c} \end{aligned}$$

两式相加、相减得

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t^2c = a \tag{1}$$

$$\frac{3}{2}t\sqrt{c} = b \tag{2}$$

由式 1 可得  $t^2$  是有理数，由式 2 可得  $t$  是有理数。不妨设  $c$  无平方因子，那么显然  $t$  应该有  $\frac{2k+1}{2}(k \in \mathbb{Z})$  的形式。枚举  $c, t$  即可。

## 278. Linear Combinations of Semiprimes

$2pqr-pq-pr-qr$

## 291. Panaitopol Primes

题目大意：设  $x, y \in \mathbb{N}^+$  且  $p = \frac{x^4 - y^4}{x^3 + y^3}$  为质数的  $p$  的和。

题解

$$\begin{aligned} p &= \frac{(x^2 + y^2)(x-y)}{x^2 - xy + y^2} \\ &= (x^2 + y^2)(x-y) \end{aligned}$$

因为  $p$  是质数，所以  $p \mid (x-y)$  或  $p \mid (x^2 + y^2)$ 。若  $p \mid (x-y)$ ，那么  $p \mid (x^2 + y^2) \mid (x^2 - xy + y^2)$ ，矛盾。因此  $p \mid (x^2 + y^2) \mid (x-y) \mid (x^2 - xy + y^2)$ ，易得  $(x-y) \mid x^2 \mid (x-y) \mid xy \mid y^2$ 。设  $x^2 = a(x-y)$ ， $xy = b(x-y)$ ， $y^2 = c(x-y)$ 。由于  $(x-y)^2 = a(x-y) - 2b(x-y) + c(x-y)$ ，因此  $(x-y) = a + c - 2b$ 。又由于  $x^2 y^2 = ac(x-y)^2 = b^2(x-y)^2$ ，因此  $ac = b^2$ ，故

$$\begin{aligned} p &= \frac{(a+c)(x-y)^2}{(a+c-b)(x-y)} \\ &= \frac{(a+c)(a+c-2b)}{a+c-b} \end{aligned}$$

设  $g = \gcd(a, b, c)$  有

$$p = g \frac{(a'+c')(a'+c'-2b')}{a'+c'-b'} \quad (a'+c'-b' \neq 0)$$

不妨设质数  $q \mid \gcd(a'+c'-2b', a'+c'-b')$ ，那么  $q \mid b'$ 。又因为  $a'c' = b'^2$ ，因此  $q \mid a'$  或  $q \mid c'$ ，从而  $q \mid a', b', c'$ ，矛盾。同理  $\gcd(a'+c', a'+c'-b') = 1$ ，因此  $(a'+c'-b') \mid g$ 。要使  $p$  为质数，必然有  $a'+c'-2b' = 1$  以及  $g = a'+c'-b'$ 。联立  $a'c' = b'^2$ ，可得  $\sqrt{a'} - \sqrt{c'} = 1$ ，因此  $p = a'+c'$ 。有  $p = n^2 + (n+1)^2$  的形式。

## 319. Bounded Sequences

题目大意：定义整序列  $\{x_n\}$  满足要求当且仅当：

- $x_1 = 2$
- $\forall 1 < i \leq n \quad x_{i-1} < x_i$
- $\forall 1 \leq i, j \leq n \quad x_i^j < (x_j + 1)^i$

定义  $f(n)$  表示长度为  $n$  的满足要求的序列的数量，求  $f(10^{10})$

题解

$$f(n) = \frac{\ln x_n}{\ln x_1} = \frac{\ln(x_n + 1)}{\ln(x_1 + 1)} = \frac{\ln(x_n + 1)}{\ln 3}$$

那么序列合法，当且仅当  $\exists t$  使得  $\forall i, \frac{1}{\ln x_i} \leq t < \frac{1}{\ln(x_i+1)}$  即  $e^{it}-1 < x_i \leq e^{it}$  那么  $x_i = \lfloor e^{it} \rfloor$  令  $i=1$  可得  $\ln 2 \leq t < \ln 3$

注意到  $e^{it}$  关于  $t$  连续且单调递增，考虑  $t$  从  $\ln 2$  增加到  $\ln 3$  的过程，显然只有  $\exists i$  使得  $e^{it}$  为整数的  $t$  才会产生一个新的序列。

设  $t = \frac{\ln z}{d}$   $z = \prod_{j=1}^n p_j^{s_j}$  且  $\gcd(s_1, \dots, s_n, d) = 1$  那么  $e^{it}$  为整数，当且仅当  $d | i$   $e^{it} = \prod_{j=1}^n p_j^{s_j} \cdot \frac{1}{d}$  若  $i \nmid d$  就有  $\frac{d}{\gcd(i, d)} | s_j$  矛盾。

不妨设  $g(m)$  为  $0 \leq t < m$  的  $t$  的数量，则答案为  $g(\ln 3) - g(\ln 2)$  考虑枚举  $d$

$$\begin{aligned} g(m) &= \sum_{d=1}^m \sum_{u \mid d} \mu(u) (e^m)^{\frac{d}{u}} \\ &= \sum_{d=1}^m \sum_{u \mid d} \mu(\frac{d}{u}) (e^m)^{\frac{d}{u}} \\ &= \sum_{u=1}^m e^{\mu(u)} \sum_{u=1}^m \lfloor \frac{m}{u} \rfloor \end{aligned}$$

然后杜教筛就可以  $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$  解决啦。

## 443. GCD sequence

题目大意：设  $f(4)=13, f(n)=f(n-1)+\gcd(n, f(n-1)) (n \geq 5)$  求  $f(10^{15})$

题解：可以猜测会有大段连续的  $1$ 。如果  $\gcd(n, f(n-1))=1$  那么下一个合法的位置应该和  $f(n-1)-n$  不互质，随便算算就好。实际只需要迭代几百次（很可能中间有一个大质数）。

## 479. Roots on the Rise

题目大意：设  $a_k, b_k, c_k$  是方程  $\frac{1}{x} = (\frac{1}{k+x^2}) - \frac{k}{x}$  的三根，求  $\sum_{k=1}^{10^6} \sum_{p=1}^{10^6} (a_k + b_k + c_k)^p$

题解：方程化简为  $x^3 - kx^2 + \frac{1}{x} - k = 0$  注意到  $(a_k + b_k + c_k)(a_k b_k c_k) = (a_k + b_k + c_k)(a_k b_k c_k + a_k b_k c_k + a_k c_k - a_k b_k c_k) = 1 - k^2$  等比数列求和一下就好了。似乎很多情况下轮换对称式都能用根与系数的关系来表示呢。

就好了。似乎很多情况下轮换对称式都能用根与系数的关系来表示呢。

## 488. Unbalanced Nim

题目大意：给你三堆石子，每堆石子的数量互不相同，两人轮流取走石子，每次可以选择一堆，从中取走一个以上的石子，要求取完之后仍要满足每堆石子的数量互不相同，最后不能操作者输。设三堆石子的数量分别为  $a, b, c$  设  $F(n)$  表示满足  $0 < a < b < c < n$  的所有负态的  $(a+b+c)$  之和，求  $F(10^{18}) \bmod 10^9$

题解：先来研究负态满足的条件：

手动打表可以发现，负态为所有满足  $0 \leq j < 2^i, k \geq 1, 0 \leq u < 2^i$  的

$(2^i+j-1, 2^{i+1}k+u-1, 2^{i+1}k+2^i+j)$  为了方便证明，不妨将三个数都加上1， 并稍微改写一下式子， 得到：负态为所有满足  $j \geq 0, 0 \leq j < 2^i, k \geq 1, 0 \leq u < 2^i$  的  $(2^i+j, 2^{i+1}k+u)$  这等价于下面的叙述：设  $a, b, c (a < b < c)$  的无前导0二进制表示分别为  $a = a'_n \dots a'_0, b = b'_n \dots b'_0, c = c'_n \dots c'_0$  和  $c$  最高的不相同的位为第  $i$  位，则  $(a, b, c)$  为负态的充要条件为  $n_b = n_c$  且  $a = b \oplus c$ 。下面我们用归纳法来证明这一结论：

显然  $(1, 2, 3)$  为负态，且满足上面的要求。

先证明不满足上面形式的状态是胜态：

- 若  $n_b < n_c$ 
  - 若  $n_a = n_b$  则  $(a \oplus b, a, b)$  是一个负态。
  - 若  $n_a < n_b$ 
    - 若  $b'_n = 1$  则  $(a, a \oplus b, b)$  是一个负态。
    - 若  $b'_n = 0$  则  $(a, b, a \oplus b)$  是一个负态。
- 若  $n_b = n_c$ 
  - 若  $a > b \oplus c$  则  $(b \oplus c, b, c)$  是一个负态。
  - 若  $a < b \oplus c$ 
    - 若  $n_a < i$ 
      - 若  $b'_n = 1$  则  $(a, a \oplus b, b)$  是一个负态。
      - 若  $b'_n = 0$  则  $(a, b, a \oplus b)$  是一个负态。
    - 若  $n_a = i$  我们来证明  $a \oplus c < b$  和  $a \oplus b < c$  至少有一个成立：

设  $a$  和  $b \oplus c$  最高的不相同的位为第  $j$  位，则有  $(a'_{n_c}) \oplus c'_{n_c} \cdots (a'_{j+1}) \oplus c'_{j+1} = b'_{n_b} \cdots b'_{j+1}$  和  $(a'_{n_b}) \oplus b'_{n_b} \cdots (a'_{j+1}) \oplus b'_{j+1} = c'_{n_b} \cdots c'_{j+1}$  均成立。又因为  $a < b \oplus c$  所以有  $a'_{n_c} = 0, b'_{n_b} \oplus c'_{n_b} = 1$  故  $a'_{n_c} \oplus c'_{n_c} < b'_{n_b} \oplus c'_{n_b}$  和  $a'_{n_b} \oplus b'_{n_b} < c'_{n_b}$  至少有一个成立，即  $a \oplus c < b$  和  $a \oplus b < c$  至少有一个成立  $\Box$

- 若  $a \oplus c < b$  则  $(a, a \oplus c, c)$  是一个负态。
- 若  $a \oplus b < c$  则  $(a, b, a \oplus b)$  是一个负态。

再证明满足上面形式的状态是负态：

- 若从  $a$  中取石子，由于  $a$  是由  $b, c$  唯一确定的，故取走  $a$  后肯定是胜态。
- 若从  $b$  中取石子
  - 若取完后  $b$  的位数小于  $c$  的位数，显然最大的两个数的位数不可能相等，也是一个胜态。
  - 若取完后  $b$  的位数等于  $c$  的位数，根据异或运算的性质  $b$  和  $c$  的异或值肯定发生了变化  $a$  也肯定不满足负态的要求。
- 若从  $c$  中取石子，与  $b$  类似可证  $\Box$

最后的答案可以通过一个简单的数位  $dp$  得到，这里就不再赘述了。

## 545. Faulhaber's Formulas

[Von Staudt–Clausen theorem](#)

## 581. 47-smooth triangular numbers

[Størmer's theorem](#)

## 613. Pythagorean Ant

题目大意：有一个边长  $3,4,5$  的三角形，一只蚂蚁等概率随机地在三角形中一点，然后等概率选择一个方向沿射线走。问穿过斜边的概率。

题解：其实就是一个二重积分，但是第二重好像很恶心的样子，所以就只积了一重，第二重数值积分：

$$\begin{aligned} & \int \pi \arctan \frac{3-y}{x} + \arctan \frac{y}{4-x} dy = \pi y + x \left[ \frac{3-y}{x} \arctan \frac{3-y}{x} - \frac{1}{2} \right] \ln \left( 1 + \left( \frac{3-y}{x} \right)^2 \right) + (4-x) \left[ \frac{y}{4-x} \arctan \frac{y}{4-x} - \frac{1}{2} \right] \ln \left( 1 + \left( \frac{y}{4-x} \right)^2 \right) + C \end{aligned}$$

我爱 python 我爱 scipy

## 622. Riffle Shuffles

题目大意：设排列  $p=(0, n, 1, n+1, 2, n+2, \dots, n-1, 2n-1)$  求出所有使得最小循环节为  $60$  的  $2n$  之和。

题解：显然  $p$  与  $p^{-1}$  的循环节长度相同  $p^{-1}=(0, 2, 4, \dots, 2n-2, 1, 3, 5, \dots, 2n-1)$  注意到除了  $2n-1$  之外，满足  $p^{-1}(x)=2x \bmod (2n-1)$  但是  $2n-1$  本身即成一个环，可以不用考虑。算一算可以发现，最小循环节长度即为最小的使得  $2^x \equiv 1 \pmod{2n-1}$  的  $x$  要使最小循环节为  $60$ ，那么要有  $2n-1 \mid 2^{60}-1$   $2n-1 \mid 2^{30}-1$   $2n-1 \mid 2^{20}-1$   $2n-1 \mid 2^{12}-1$  稍微算一下即可。

## 624. Two heads are better than one

题目大意：随机抛一枚硬币，当出现两次正面时停止。设  $P(n)$  表示停止时抛硬币的次数能被  $n$  整除的概率，求  $P(10^{18}) \bmod 10^9 + 9$

题解：设  $f_H(x), f_T(x)$  表示当前未结束，且结尾为 H 或 T 的概率  $f_{HH}(x)$  表示当前已经结束的概率。那么可以写出生成函数方程：

$$\begin{aligned} f_{HH}(x) &= \frac{1}{2}x f_H(x) + x f_{HH}(x) \\ f_H(x) &= \frac{1}{2}x f_T(x) + \frac{1}{2} \\ f_T(x) &= \frac{1}{2}x(f_H(x) + f_T(x)) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

代入  $f_T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$  可得  $f_T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$  代回  $f_H(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$  代回  $f_{HH}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$  所求即为  $f_{HH}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$

因此有  $g_0=0, g_1=\frac{1}{2}, g_n=\frac{1}{2}g_{n-1}+\frac{1}{4}g_{n-2}$  可以解得特征方程的两个根为  $654248003, 845752011$ 。从而解得通项为  $361699202 \times 654248003^n + 638300807 \times 845752011^n$  最后等比数列求和一下就好了。

## 692. Siegbert and Jo

题目大意：一个游戏有  $n$  颗石子，两人轮流拿，每人最少拿一颗，最多拿上一个人拿的两倍。第一次拿没有限制。设  $f(n)$  表示先手最少拿几颗保证必胜，求  $\sum_{k=1}^n f(k)$

题解：这题出过很多次了，主要是  $f(n)$  的定义给了我另一个视角看待这个问题  $f(n)$  本身其实是可以直接计算的，不需要分析胜负态  $f(n)$  即为最小的  $i$  使得  $2i < f(n-i)$  答案打表找规律即可。

## 711. Binary Blackboard

题目大意：给出一个正整数  $n$  并在黑板上写下  $n$  的二进制表示，之后先手后手轮流在黑板上写正整数的二进制表示，并保证和不超过  $2n$  不能写时游戏结束。如果  $1$  的数量为奇数，先手胜，否则后手胜。分析胜负态。

题解：定义  $f(n) = \text{bitcnt}(n)$  若  $\exists$

$x+y=n$   $y=2^{\lfloor f(y) \rfloor - 1}$ ,  $f(n)+f(x)+f(y) \equiv 1 \pmod{2}$  那么显然先手必胜，先手写上  $x$  后，不论后手写什么，先手写上  $y$  减它即可获胜。

考虑  $n$  最后连续的  $1$  的数量  $d$  分类讨论（以下都是所有位不全为  $1$  的情况）：

- 若  $d$  为奇数，且前面存在一个偶数位  $b$  为  $1$ ，那么令  $x=n-2^{\lfloor b \rfloor}+1$   $f(n)+f(x)+f(y)=2f(n)-1-d+1+b$  为一个奇数，因此先手胜。
- 若  $d$  为偶数，且前面存在一个奇数位  $b$  为  $1$ ，同理先手胜。

若全部位都为  $1$ ，后手只需把所有数拿走就可以获胜了。

剩余两种情况，不会证了。。。

- 若  $d$  为奇数，且前面所有为  $1$  的位均为奇数，先手胜。
- 若  $d$  为偶数，且前面所有为  $1$  的位均为偶数，先手负。

## 741. Binary grid colouring

题目大意：在一个  $n \times n$  的网格上黑白染色，使得每行每列均恰好有两个格子是黑的，求在旋转和对称等价的意义下不同的方案数。

题目大意：显然需要使用 burnside 引理，总共需要计算  $5$  种情况，分别是无限制、旋转  $90^\circ$  相同、旋转  $180^\circ$  相同、沿对角线对称、水平或竖直对称。

解决这道题的关键思想是将其看做一个图的邻接矩阵（但是行顺序有关系），由于每一列有  $2$  个黑格子，相当于每个点的度数都是  $2$ ，也就是说图是由若干个环组成的。确定好边集后，行之间还可以任意排列，但是需要注意二元环的两条边交换没有意义，故每个二元环需要除  $2$ 。总而言之，通过枚举  $1$  所在的环，可以列出  $dp$  方程：

$$\begin{aligned} dp_i &= \sum_{j=2}^i \frac{A_{i-1}^{j-1}}{2} \cdot dp_{i-j} \\ &= (i-1)! \sum_{j=2}^i \frac{dp_{i-j}}{(i-j)!} \end{aligned}$$

答案是  $n!dp_n$  可以  $\mathcal{O}(n)$  计算。

旋转  $90^\circ$  时，若  $n$  为奇数，由于黑格子的数量模  $4$  总不为  $0$ ，因此无解。若  $n$  为偶数的时候，考虑左上一半格子，它旋转  $90^\circ$  后要每行每列各有  $2$  个黑格子，可以证明这等价于第  $i$  行加第  $i$  列的黑格子数为  $2$ 。考虑第  $1$  行第  $1$  列的放置方式，分类讨论一下可以  $dp$  解决。

旋转  $180^\circ$  时，考虑将第  $i$  列和第  $n+1-i$  列看作同一个点。若  $n$  为偶数时与第一种情况大体相同，区别在于可以有自环，并且第  $i$  列和第  $n+1-i$  列是两种不同的方案。若  $n$  为奇数时较复杂。首先不妨将中间行和中间列的黑点都放在两侧。第一行有两种情况，填  $1/n$  或填其它。填  $1/n$  时，归约到了  $n-3$  的情况。否则不妨设填了  $2$ ，那么相当于  $1$  和  $2$  的度只能是  $1$ ，那么可以枚举一下  $1-2$  的这一条链中间的点，然后也能归约到偶数的情况。

沿对角线对称时与旋转  $90^\circ$  /  $270^\circ$  类似，而沿水平/垂直对称最为简单。

时间复杂度  $\mathcal{O}(n)$

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidswor:zhongzihao:project\\_euler&rev=1611325262](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidswor:zhongzihao:project_euler&rev=1611325262)

Last update: **2021/01/22 22:21**