

152. Writing $1/2$ as a sum of inverse squares

题目大意：问有多少种方式将 $\frac{1}{2}$ 表示成 $2 \sim 80$ 之间的不同数的倒数平方和。

题解：感觉除了暴力没啥好的性质。首先将所有倒数平方乘上 $\text{lcm}(2^2, \dots, 80^2)$ 就转成了一个 meet-in-middle 问题。但是将近 80 个数太多了。不知道为什么就发现了有很多数是不可能选取的。具体来说，选取 lcm 的一个小约数，你会发现大部分的元素模它为 0，对于模它不为 0 的所有元素，直接 2^n 枚举一下组合，然后就会发现有些数永远不能出现在组合中，否则就没法凑出 0。随便选一些（其实是有一些规律的）约数筛完后，就只剩下 30 多个可选的元素了。

195. Inscribed circles of triangles with one angle of 60 degrees

题目大意：大约是要要求 $a^2 - ab + b^2 = c^2$ 的正整数解。

题解：部分这样的三元二次齐次不定方程有很漂亮的解法。

$$\begin{aligned} &|a - b\omega|^2 = |a - \frac{b}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}i|^2 = a^2 - ab + b^2 \end{aligned}$$

其中 $\omega = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 为 $\omega^3 + 1 = 0$ 的解。

$$\begin{aligned} &(a^2 - ab + b^2)^2 = |a - b\omega|^4 \\ &= |a^2 - 2ab\omega + b^2\omega^2|^2 = |a^2 - b^2 - (2ab - b^2)\omega|^2 \\ &= (a^2 - b^2)^2 - (a^2 - b^2)(2ab - b^2) + (2ab - b^2)^2 \end{aligned}$$

枚举 a, b 即可得到通解（不会证充分性）。

251. Cardano Triplets

题目大意：求满足 $a + b + c \mid n \mid \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{c}} = 1$ 的正整数 (a, b, c) 数量。

题解：不妨设 $a + b\sqrt{c} = (\frac{1}{2} + t\sqrt{c})^3$ 则 $a - b\sqrt{c} = (\frac{1}{2} - t\sqrt{c})^3$ 因此有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t\sqrt{c} + \frac{3}{2}t^2c + t^3c\sqrt{c} &= a + b\sqrt{c} \\ \frac{1}{8} - \frac{3}{4}t\sqrt{c} + \frac{3}{2}t^2c - t^3c\sqrt{c} &= a - b\sqrt{c} \end{aligned}$$

两式相加、相减得

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{2}t^2c = a \tag{1}$$

$$\frac{3}{4}t + t^3c = b \tag{2}$$

由式 1 可得 t^2 是有理数，由式 2 可得 t 是有理数。不妨设 c 无平方因子，那么显然 t 应该有 $\frac{2k+1}{Z}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的形式。枚举 c, t 即可。

253. Tidying up

题目大意：有一个 $1 \times n$ 的格子，随机一个 $1 \sim n$ 的排列给它染色，求染色过程中连续子段最大值的期望。

题解：状压 dp 当然是要 TLE 的啦。

注意到连续的一段 1 可以压缩，除了开头和末尾之外的连续的 0，它们的顺序可以随意交换。

这样复杂度就是 n 的拆分数乘上很多个 n 了。

278. Linear Combinations of Semiprimes

$2pqr-pq-pr-qr$

291. Panaitopol Primes

题目大意：设 $x, y \in \mathbb{N}^+$ $p = \frac{x^4 - y^4}{x^3 + y^3}$ 求所有 $\leq n$ 且为质数的 p 的和。

题解

$$\begin{aligned} p &= \frac{(x^2 + y^2)(x - y)}{x^2 - xy + y^2} \parallel p(x^2 - xy + y^2) = (x^2 + y^2)(x - y) \end{aligned}$$

因为 p 是质数，所以 $p \mid (x - y)$ 或 $p \mid (x^2 + y^2)$ 若 $p \mid (x - y)$ 那么 $(x^2 + y^2) \mid (x^2 - xy + y^2)$ 矛盾。因此 $p \mid (x^2 + y^2) \parallel (x - y) \mid (x^2 - xy + y^2)$ 易得 $(x - y) \mid x^2 \parallel (x - y) \mid xy \parallel (x - y) \mid y^2$ 设 $x^2 = a(x - y) \parallel xy = b(x - y) \parallel y^2 = c(x - y)$ 由于 $(x - y)^2 = a(x - y) - 2b(x - y) + c(x - y)$ 因此 $(x - y) = a + c - 2b$ 又由于 $x^2 y^2 = ac(x - y)^2 = b^2(x - y)^2$ 因此 $ac = b^2$ 故

$$\begin{aligned} p &= \frac{(a + c)(x - y)^2}{(a + c - b)(x - y)} \parallel \& = \frac{(a + c)(a + c - 2b)}{a + c - b} \end{aligned}$$

设 $g = \gcd(a, b, c)$ 有

$$p = g \frac{(a' + c')(a' + c' - 2b')}{a' + c' - b'}$$

不妨设质数 $q \mid \gcd(a' + c' - 2b', a' + c' - b')$ 那么 $q \mid b'$ 又因为 $a'c' = b'^2$ 因此 $q \mid a'$ 或 $q \mid c'$ 从而 $q \mid a', b', c'$ 矛盾。同理 $\gcd(a' + c', a' + c' - b') = 1$ 因此 $(a' + c' - b') \mid g$ 要使 p 为质数，必然有 $a' + c' - 2b' = 1$ 以及 $g = a' + c' - b'$ 联立 $a'c' = b'^2$ 可得 $\sqrt{a'} - \sqrt{c'} = 1$ 因此 $p = a' + c'$ 有 $p = n^2 + (n + 1)^2$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 的形式。

319. Bounded Sequences

题目大意：定义整序列 $\{x_n\}$ 满足要求当且仅当：

- $x_1=2$
- $\forall 1 < i \leq n, x_{i-1} < x_i$
- $\forall 1 \leq i, j \leq n, x_i^j < (x_{j+1})^i$

定义 $f(n)$ 表示长度为 n 的满足要求的序列的数量，求 $f(10^{10})$

题解

$$x_i^j < (x_{j+1})^i \iff j \ln x_i < i \ln(x_{j+1}) \iff \frac{\ln x_i}{x_i} < \frac{\ln(x_{j+1})}{x_{j+1}}$$

那么序列合法，当且仅当 $\exists t$ 使得 $\forall i, \frac{\ln x_i}{x_i} \leq t < \frac{\ln(x_{i+1})}{x_{i+1}}$ 即 $e^{t-1} < x_i \leq e^t$ 那么 $x_i = \lfloor e^t \rfloor$ 令 $i=1$ 可得 $\ln 2 \leq t < \ln 3$

注意到 e^t 关于 t 连续且单调递增，考虑 t 从 $\ln 2$ 增加到 $\ln 3$ 的过程，显然只有 $\exists i$ 使得 e^t 为整数的 t 才会产生一个新的序列。

设 $t = \frac{\ln z}{d}, z = \prod_{j=1}^e p_j^{s_j}$ 且 $\gcd(s_1, \dots, s_e, d) = 1$ 那么 e^t 为整数，当且仅当 $d | e^t = \prod_{j=1}^e p_j^{\frac{s_j}{d}}$ 若 $d \nmid d$ 就有 $\frac{d}{\gcd(i,d)} | s_j$ 矛盾。

不妨设 $g(m)$ 为 $0 \leq t < m$ 的 t 的数量，则答案为 $g(\ln 3) - g(\ln 2)$ 考虑枚举 d

$$g(m) = \sum_{d=1}^m \sum_{u \mid d} \mu\left(\frac{d}{u}\right) (e^m)^{\frac{d}{u}} = \sum_{d=1}^m \sum_{u \mid d} \mu\left(\frac{d}{u}\right) (e^m)^u = \sum_{u=1}^m e^{mu} \sum_{u \mid \lfloor \frac{m}{u} \rfloor} \mu(u)$$

然后杜教筛就可以 $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$ 解决啦。

443. GCD sequence

题目大意：设 $f(4)=13, f(n)=f(n-1)+\gcd(n, f(n-1)) (n \geq 5)$ 求 $f(10^{15})$

题解：可以猜测会有大段连续的 1 。如果 $\gcd(n, f(n-1))=1$ 那么下一个合法的位置应该和 $f(n-1)-n$ 不互质，随便算算就好。实际只需要迭代几百次（很可能中间有一个大质数）。

479. Roots on the Rise

题目大意：设 a_k, b_k, c_k 是方程 $\frac{1}{x} = (\frac{k}{x})(k+x^2) - kx$ 的三根，求 $\sum_{k=1}^{10^6} \sum_{p=1}^{10^6} (a_k+b_k)^p (b_k+c_k)^p (c_k+a_k)^p$

题解：方程化简为 $x^3 - kx^2 + \frac{1}{k}x - k = 0$ 注意到 $(a_k+b_k)(b_k+c_k)(c_k+a_k) = (a_k+b_k+c_k)(a_k b_k + b_k c_k + c_k a_k)$

$a_{k+1}-a_k, b_{k+1}-b_k, c_{k+1}-c_k=1-k^2$ 等比数列求和一下就好了。似乎很多情况下轮换对称式都能用根与系数的关系来表示呢。

就好了。似乎很多情况下轮换对称式都能用根与系数的关系来表示呢。

488. Unbalanced Nim

题目大意：给你三堆石子，每堆石子的数量互不相同，两人轮流取走石子，每次可以选择一堆，从中取走一个以上的石子，要求取完之后仍要满足每堆石子的数量互不相同，最后不能操作者输。设三堆石子的数量分别为 a, b, c 设 $F(n)$ 表示满足 $0 < a < b < c < n$ 的所有负态的 $(a+b+c)$ 之和，求 $F(10^{18}) \bmod 10^9$

题解：先来研究负态满足的条件：

手动打表可以发现，负态为所有满足 $i \geq 0, 0 \leq j < 2^i, k \geq 1, 0 \leq u < 2^i$ 的 $(2^i + j - 1, 2^{i+1}k + u - 1, 2^{i+1}k + 2^i + (j \oplus u) - 1)$ 为了方便证明，不妨将三个数都加上 1，并稍微改写一下式子，得到：负态为所有满足 $i \geq 0, 0 \leq j < 2^i, k \geq 1, 0 \leq u < 2^i$ 的 $(2^i + (j \oplus u), 2^{i+1}k + j, 2^{i+1}k + 2^i + u)$ 这等价于下面的叙述：设 $a, b, c (a < b < c)$ 的无前导 0 二进制表示分别为 $a = a'_n \dots a'_0, b = b'_n \dots b'_0, c = c'_n \dots c'_0$ b 和 c 最高的不相同的位为第 i 位，则 (a, b, c) 为负态的充要条件为 $n_b = n_c$ 且 $a = b \oplus c$ 下面我们用归纳法来证明这一结论：

显然 $(1, 2, 3)$ 为负态，且满足上面的要求。

先证明不满足上面形式的状态是胜态：

- 若 $n_b < n_c$
 - 若 $n_a = n_b$ 则 $(a \oplus b, a, b)$ 是一个负态。
 - 若 $n_a < n_b$
 - 若 $b'_{n_a} = 1$ 则 $(a, a \oplus b, b)$ 是一个负态。
 - 若 $b'_{n_a} = 0$ 则 $(a, b, a \oplus b)$ 是一个负态。
- 若 $n_b = n_c$
 - 若 $a > b \oplus c$ 则 $(b \oplus c, b, c)$ 是一个负态。

◦ 若 $a < b \oplus c$

▪ 若 $n_a < i$

• 若 $b'_{n_a} = 1$ 则 $(a, a \oplus b, b)$ 是一个负态。

• 若 $b'_{n_a} = 0$ 则 $(a, b, a \oplus b)$ 是一个负态。

▪ 若 $n_a = i$ 我们来证明 $a \oplus c < b$ 和 $a \oplus b < c$ 至少有一个成立：

设 a 和 $b \oplus c$ 最高的不相同的位为第 j 位，则有 $(a'_{n_c} \oplus c'_{n_c}) \cdots (a'_{j+1} \oplus c'_{j+1}) = b'_{n_c} \cdots b'_{j+1}$ 和 $(a'_{n_b} \oplus b'_{n_b}) \cdots (a'_{j+1} \oplus b'_{j+1}) = c'_{n_b} \cdots c'_{j+1}$ 均成立。又因为 $a < b \oplus c$ 所以有 $a'_j = 0, b'_j \oplus c'_j = 1$ 故 $a'_j \oplus c'_j < b'_j$ 和 $a'_j \oplus b'_j < c'_j$ 至少有一个成立，即 $a \oplus c < b$ 和 $a \oplus b < c$ 至少有一个成立 \square

• 若 $a \oplus c < b$ 则 $(a, a \oplus c, c)$ 是一个负态。

• 若 $a \oplus b < c$ 则 $(a, b, a \oplus b)$ 是一个负态。

再证明满足上面形式的状态是负态：

- 若从 a 中取石子，由于 a 是由 b, c 唯一确定的，故取走 a 中石子后肯定是胜态。
- 若从 b 中取石子
 - 若取完后 b 的位数小于 c 的位数，显然最大的两个数的位数不可能相等，也是一个胜态。
 - 若取完后 b 的位数等于 c 的位数，根据异或运算的性质 b 和 c 的异或值肯定发生了变化 a 也肯定不满足负态的要求。
- 若从 c 中取石子，与 b 类似可证 \square

最后的答案可以通过一个简单的数位 dp 得到，这里就不再赘述了。

545. Faulhaber's Formulas

[Von Staudt-Clausen theorem](#)

581. 47-smooth triangular numbers

[Størmer's theorem](#)

613. Pythagorean Ant

题目大意：有一个边长 $3,4,5$ 的三角形，一只蚂蚁等概率随机地在三角形中一点，然后等概率选择一个方向沿射线走。问穿过斜边的概率。

题解：其实就是个二重积分，但是第二重好像很恶心的样子，所以就只积了一重，第二重数值积分：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\arctan\frac{3-y}{x}}^{\arctan\frac{y}{4-x}} \mathrm{d}y &= \pi y + x \ln\left(\frac{3-y}{x}\right) - \arctan\frac{3-y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{3-y}{x}\right)^2\right) \\ &+ (4-x) \left[\arctan\frac{y}{4-x} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y}{4-x}\right)^2\right) \right] + C \end{aligned}$$

我爱 python 我爱 scipy

622. Riffle Shuffles

题目大意：设排列 $p=(0,n,1,n+1,2,n+2,\dots,n-1,2n-1)$ 求出所有使得最小循环节为 60 的 $2n$ 之和。

题解：显然 p 与 p^{-1} 的循环节长度相同 $p^{-1}=(0,2,4,\dots,2n-2,1,3,5,\dots,2n-1)$ 注意到除了 $2n-1$ 之外，满足 $p^{-1}(x)=2x \pmod{2n-1}$ 但是 $2n-1$ 本身即成一个环，可以不用考虑。算一算可以发现，最小循环节长度即为最小的使得 $2^x \equiv 1 \pmod{2n-1}$ 的 x 要使最小循环节为 60 ，那么要有 $2n-1 \mid 2^{60}-1$ $2n-1 \mid 2^{30}-1$ $2n-1 \mid 2^{20}-1$ $2n-1 \mid 2^{12}-1$ 稍微算一下即可。

624. Two heads are better than one

题目大意：随机抛一枚硬币，当出现两次正面时停止。设 $P(n)$ 表示停止时抛硬币的次数能被 n 整除的概率，求 $P(10^{18}) \pmod{10^9+9}$

题解：设 $f_H(x), f_T(x)$ 表示当前未结束，且结尾为 H 或 T 的概率 $f_{HH}(x)$ 表示当前已经结束的概率。那么可以写出生成函数方程：

$$\begin{aligned} f_{HH}(x) &= \frac{1}{2} x f_H(x) + \frac{1}{2} x f_{HH}(x) \\ f_H(x) &= \frac{1}{2} x f_T(x) + \frac{1}{2} \\ f_T(x) &= \frac{1}{2} x (f_H(x) + f_T(x)) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) 代入 (3) 可得 $f_T(x) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2}$ 代回 (2) 可得 $f_H(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2}$ 代回 (1) 可得 $f_{HH}(x) = \frac{\frac{1}{4}x}{(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2)(1-x)}$ 所求即为 $f_{HH}(x) = \frac{\frac{1}{4}x}{(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2)}$

因此有 $g_0=0, g_1=\frac{1}{4}, g_n=\frac{1}{2}g_{n-1} + \frac{1}{4}g_{n-2} (n \geq 2)$ 可以解得特征方程的两个根为 $654248003, 845752011$ 。从而解得通项为 $361699202 \times 654248003^n + 638300807 \times 845752011^n$ 最后等比数列求和一下就好

了。

692. Siegbert and Jo

题目大意：一个游戏有 n 颗石子，两人轮流拿，每人最少拿一颗，最多拿上一个人拿的两倍。第一次拿没有限制。设 $f(n)$ 表示先手最少拿几颗保证必胜，求 $\sum_{k=1}^n f(k)$

题解：这题出过很多次了，主要是 $f(n)$ 的定义给了我另一个视角看待这个问题。 $f(n)$ 本身其实是可以直接计算的，不需要分析胜负态。 $f(n)$ 即为最小的 i 使得 $2i < f(n-i)$ 。答案打表找规律即可。

711. Binary Blackboard

题目大意：给出一个正整数 n 并在黑板上写下 n 的二进制表示，之后先手后手轮流在黑板上写正整数的二进制表示，并保证和不超过 $2n$ 不能写时游戏结束。如果 1 的数量为奇数，先手胜，否则后手胜。分析胜负态。

题解：定义 $f(n) = \text{bitcnt}(n)$ 若 $\exists x, y$

$x + y = n, y = 2^{f(y)} - 1, f(n) + f(x) + f(y) \equiv 1 \pmod{2}$ 那么显然先手必胜，先手写上 x 后，不论后手写什么，先手写上 y 减它即可获胜。

考虑 n 最后连续的 1 的数量 d 分类讨论（以下都是所有位不全为 1 的情况）：

- 若 d 为奇数，且前面存在一个偶数位 b 为 1 ，那么令 $x = n - 2^{b+1} + 1, f(n) + f(x) + f(y) = 2f(n) - 1 - d + 1 + b$ 为一个奇数，因此先手胜。
- 若 d 为偶数，且前面存在一个奇数位 b 为 1 ，同理先手胜。

若全部位都为 1 ，后手只需把所有数拿走就可以获胜了。

剩余两种情况，不会证了。。。

- 若 d 为奇数，且前面所有为 1 的位均为奇数，先手胜。
- 若 d 为偶数，且前面所有为 1 的位均为偶数，先手负。

741. Binary grid colouring

题目大意：在一个 $n \times n$ 的网格上黑白染色，使得每行每列均恰好有两个格子是黑的，求在旋转和对称等价的意义下不同的方案数。

题目大意：显然需要使用 Burnside 引理，总共需要计算 5 种情况，分别是无限制、旋转 $90^\circ / 270^\circ$ 相同、旋转 180° 相同、沿对角线对称、水平或竖直对称。

解决这道题的关键思想是将其看做一个图的邻接矩阵（但是行顺序有关系），由于每一列有 2 个黑格子，相当于每个点的度数都是 2 ，也就是说图是由若干个环组成的。确定好边集后，行之间还可以任意排列，但是需要注意二元环的两条边交换没有意义，故每个二元环需要除 2 。总而言之，通过枚举 1 所在的环，可以列出 dp 方程：

$$\begin{aligned} dp_i &= \sum_{j=2}^i \frac{A_{i-1}^{j-1}}{2} \cdot dp_{i-j} \\ &= (i-1)! \sum_{j=2}^i \frac{dp_{i-j}}{(i-j)!} \end{aligned}$$

答案是 $n!dp_{\{n\}}$ 可以 $\mathcal{O}(n)$ 计算。

旋转 $90^\circ/270^\circ$ 时，若 n 为奇数，由于黑格子的数量模 4 总不为 0，因此无解。当 n 为偶数的时候，考虑左上一半格子，它旋转 4 下后要每行每列各有 2 个黑格子，可以证明这等价于第 i 行加第 i 列的黑格子数为 2。考虑第 1 行第 1 列的放置方式，分类讨论一下可以 dp 解决。

旋转 180° 时，考虑将第 i 列和第 $n+1-i$ 列看作同一个点。当 n 为偶数时与第一种情况大体相同，区别在于可以有自环，并且第 i 列和第 $n+1-i$ 列是两种不同的方案。当 n 为奇数时较复杂。首先不妨将中间行和中间列的黑点都放在两侧。第一行有两种情况，填 1/n 或填其它。填 1/n 时，归约到了 $n-3$ 的情况。否则不妨设填了 2，那么相当于 1 和 2 的度只能是 1，那么可以枚举一下 1-2 的这一条链中间的点，然后也能归约到偶数的情况。

沿对角线对称时与旋转 $90^\circ/270^\circ$ 类似，而沿水平/垂直对称最为简单。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:project_euler&rev=1611764591

Last update: 2021/01/28 00:23