随机游走

有一类随机游走问题定义如下：在数轴中 $[0,n]$ 之间的整点上随机走动，走到 0 或点 n 时停止。否则，在点 i 处，分别有 $f(i),g(i),h(i)$ 的概率向左走一步，不动，或者向右走一步，其中 $f(i)+g(i)+h(i)=1$

首先可以计算出 $P(i)$ 表示从点 i 走到点 n 的概率。那么有) $$ P(i)= \begin{cases} &0&(i=0)\\ &f(i)P(i-1)+g(i)P(i)+h(i)P(i+1)&(0<i<n)\\ &1&(i=n)\\ \end{cases} $$

注意到

$$ \begin{aligned} (f(i)+h(i))P(i)=&f(i)P(i-1)+h(i)P(i+1)\\ f(i)(P(i)-P(i-1))=&h(i)(P(i+1)-P(i))\\ P(i+1)-P(i)=&\frac{f(i)}{h(i)}(P(i)-P(i-1))\\ \end{aligned} $$

因此

$$ P(i)=P(1)\cdot\sum_{j=0}^{i-1}\frac{\prod_{k=1}^{j}f(k)}{\prod_{k=1}^{j}h(k)} $$

那么可以得到 $P(n)$ 与 $P(1)$ 之间的关系，即可解出 $P(1)$ 从而求出所有 P

此外，我们还可以为本题定义一种伪数学期望，它是指能到达点 n 的前提下，游戏进行的期望次数，即 $E(t)=\sum_{i=0}^{+\infty}iP(i|x_{0}=t)$ 这里 $P(i|x_{0}=t)$ 是指从 t 出发，恰好在 i 步后走到 n 的概率。

$$ \begin{aligned} E(t)&=\sum_{i=0}^{+\infty}iP(i|x_{0}=t)\\ &=\sum_{i=0}^{+\infty}i(f(i)P(i-1|x_{0}=t-1)+g(i)P(i-1|x_{0}=t)+h(i)P(i-1|x_{0}=t))\\ &=f(t)E(t-1)+g(t)E(t)+h(t)E(t+1)+P(t)\\ \end{aligned} $$

因此

$$ \begin{aligned} f(t)(E(t)-E(t-1))&=h(t)(E(t+1)-E(t))+P(t)\\ \end{aligned} $$

定义 $dE(t)=E(t)-E(t-1)$ 那么

$$ \begin{aligned} f(t)dE(t)&=h(t)dE(t+1)+P(t)\\ dE(t+1)&=\frac{f(t)}{h(t)}dE(t)-\frac{1}{h(t)}P(t)\\ \end{aligned} $$

那么这样可以 $\mathcal{O}(n)$ 计算。

如果希望能够在亚线性时间进行计算，可以看到概率尚有比较优美的闭式解，从中可能可以挖掘出一些性质。而对于伪期望，这一方法就行不通了。为了进一步解决类似这样的问题，我们需要引入一些随机过程中的理论。

鞅

设有一随机过程 $\{X_{n},n\ge0\}$ 若对于一切 n $E[|X_{n}|]<\infty$ 且 $E[X_{n+1}|X_{0},X_{1},\ldots,X_{n}]=X_{n}$ 那么称 $\{X_{n},n\ge0\}$ 为鞅。

随机时间

正整数值（可能取无穷）的随机变量 N 称为随机过程 $\{X_{n},n\ge0\}$ 的随机时间，如果事件

$N=n$ 由随机变量 $X_{0},\ldots,X_{n}$ 决定。若 $P(N<\infty)=1$□随机时间 N 称为停时。

停止过程

设 N 是过程 $\{X_{n},n\ge0\}$ 的随机时间，令

$$ \overline{X}_{n}= \begin{cases} &X_{n}&(n\le N)\\ &X_{N}&(n>N) \end{cases} $$

形象地说，当随机时间 N 达到之后，随机过程即停止，不再发生变化。

引理 1

若 N 是鞅 $\{X_{n}\}$ 的随机时间，则停止过程 $\{\overline{X}_{n}\}$ 也是鞅。

因此 $E[\overline{X}_{n}]=E[\overline{X}_{0}]=E[X_{0}]$□

定理 1（停时定理）

若 N 是鞅 $\{X_{n}\}$ 的停时，那么（在一定的正则性条件下□$E[X_{N}]=E[X_{0}]$□

这是一个重要的定理，为后面的方法奠定了基础。

基本思想

假设有一个随机过程 $\{X_{n},n\ge0\}$ 及其停时 T□现在需要求出 $E[T]$□但是通常来说 $E(T)$ 并不好求。但是对于随机游走这样的随机过程，不妨构造 X 的一个势函数 $\phi(X)$□使得

$$ \begin{aligned} &E[\phi(X_{n+1})-\phi(X_{n})|X_{0},\ldots,X_{n}]=-1&(n<T)\\ &E[\phi(X_{n+1})-\phi(X_{n})|X_{0},\ldots,X_{n}]=0&(n\ge T)\\ \end{aligned} $$

即每走一步势函数期望减小 1，停时后则不变。

这里需要证明可以构造停时的双射。通常在这类题目中，状态转移是一个马尔可夫过程，且 X 恰有一种状态 X_{T} 是停止状态，那么我们希望证明 $\phi(X_{T})$ 是唯一的。事实上，可以证明 $\phi(X_{T})$ 是唯一的最小值。假设它不是唯一的最小值，那么一定存在一个状态 X'□它不是停止状态，且 $\phi(X')$ 是最小值，那么 $E[\phi(X'_{1})-\phi(X')|X']=-1$□那么显然存在一种状态使得它的值比 $\phi(X')$ 小，矛盾。因此在 ϕ 满足要求的前提下□$\phi(X_{T})$ 是唯一的最小值，从而可以在两个随机过程中建立一个停时的双射。

考虑随机过程 $Y_{n}=\phi(X_{n})+\min(n,N)$□首先证明 Y_{n} 是鞅：

若 $n<T$□那么

$$ \begin{aligned} &E[Y_{n+1}|Y_{0},\ldots,Y_{n}]\\ =&E[Y_{n+1}-Y_{n}|Y_{0},\ldots,Y_{n}]+Y_{n}\\ =&Y_{n}\Box \end{aligned} $$

同理 $n\ge T$ 也可证。

根据停时定理□$E[Y_{T}]=E[Y_{0}]$□即 $E[\phi(X_{T})+T]=E[\phi(X_{0})+0]$□因此 $E[T]=\phi(X_{0})-\phi(X_{T})$□

下面具体到各个题目讲解 ϕ 的构造。

CF 1349D

题解：设球的总数为 $m=\sum_{i=1}^{n}x_{i}$□定义 $X_{t}=(x_{t1},x_{t2},\ldots,x_{tn})$□考虑势函数 $\phi(X_{t})=\sum_{i=1}^{n}f(x_{ti})$□

$$ \begin{aligned} E[\phi(X_{t+1})|X_{t}]&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{x_{ti}}{m(n-1)}\left[f(x_{ti}-1)+f(x_{tj}+1)+\sum_{k\notin\{i,j\}}f(x_{tk})\right]\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ti}}{m}f(x_{ti}-1)+\frac{m-x_{ti}}{m(n-1)}f(x_{ti}+1)+\frac{(m-x_{ti})(n-2)}{m(n-1)}f(x_{ti}) \end{aligned} $$

由于 $E[\phi(X_{t+1})-\phi(X_{t})|X_{t}]=-1$□因此

$$ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}f(x_{ti})&=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ti}}{m}f(x_{ti}-1)+\frac{m-x_{ti}}{m(n-1)}f(x_{ti}+1)+\frac{(m-x_{ti})(n-2)}{m(n-1)}f(x_{ti})+\frac{x_{ti}}{m} \end{aligned} $$

那么只要对于任意 x 令 $f(x)=\frac{x}{m}f(x-1)+\frac{m-x}{m(n-1)}f(x+1)+\frac{(m-x)(n-2)}{m(n-1)}f(x)+\frac{x}{m}$ 即可。

令 $x=0$□可得 $f(0)=f(1)$□不妨令 $f(0)=f(1)=1$□即可递推求解。

注意到

$$ \begin{aligned} \left(\frac{x}{m}+\frac{m-x}{m(n-1)}\right)f(x)&=\frac{x}{m}f(x-1)+\frac{m-x}{m(n-1)}f(x+1)+\frac{x}{m}\\ \frac{x}{m}[f(x)-f(x-1)]&=\frac{m-x}{m(n-1)}[f(x+1)-f(x)]+\frac{x}{m}\\ f(x+1)-f(x)&=\frac{(n-1)x}{(m-x)}[f(x)-f(x-1)-1] \end{aligned} $$

答案为 $\sum_{i=1}^{n}f(x_{0i})-(f(m)+(n-1)f(0))$□

CF 850F

题解：与上题的思路基本相同：

$$ \begin{aligned} E[\phi(X_{t+1})|X_{t}]&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{x_{ti}x_{tj}}{m(m-1)}\left[f(x_{ti}+1)+f(x_{tj}-1)+\sum_{k\notin\{i,j\}}f(x_{tk})\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ti}(x_{ti}-1)}{m(m-1)}\phi(X_{t})\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ti}(m-x_{ti})}{m(m-1)}f(x_{ti}-1)+\frac{x_{ti}(m-x_{ti})}{m(m-1)}f(x_{ti}+1)+\left[1-\frac{2x_{ti}(m-x_{ti})}{m(m-1)}\right]f(x_{ti}) \end{aligned} $$

由于 $E[\phi(X_{t+1})-\phi(X_{t})|X_{t}]=-1$□因此

$$ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}f(x_{ti})&=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ti}(m-x_{ti})}{m(m-1)}f(x_{ti}-1)+\frac{x_{ti}(m-x_{ti})}{m(m-1)}f(x_{ti}+1)+\left[1-\frac{2x_{ti}(m-x_{ti})}{m(m-1)}\right]f(x_{ti})+\frac{x_{ti}}{m} \end{aligned} $$

那么只要对于任意 x 令 $f(x)=\frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x-1)+\frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x+1)+\left[1-\frac{2x(m-x)}{m(m-1)}\right]f(x)+\frac{x}{m}$ 即可。

注意到

$$ \begin{aligned} \frac{2x(m-x)}{m(m-1)}f(x)&=\frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x-1)+\frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x+1)+\frac{x}{m}\\ f(x+1)-f(x)&=f(x)-f(x-1)-\frac{m-1}{m-x} \end{aligned} $$

注意到令 $x=0$ 得到 $f(0)=f(0)$，因此 $f(0),f(1)$ 均可任取。本题中 m 较大，但是计算可得 $f(m)=f(0)+m(f(1)-f(0))-(m-1)^{2}$。

CF 1025G

题解：与上题的思路基本相同：

$$ \begin{aligned} E[\phi(X_{t+1})|X_{t}]&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1}{n(n-1)}\left[f(x_{ti}+1)+(x_{tj}-1)f(1)+\sum_{k\notin\{i,j\}}f(x_{tk})\right]\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_{ti}+1)+\frac{x_{ti}-1}{n}f(1)+\frac{n-2}{n}f(x_{ti}) \end{aligned} $$

由于 $E[\phi(X_{t+1})-\phi(X_{t})|X_{t}]=-1$，因此

$$ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}f(x_{ti})&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_{ti}+1)+\frac{x_{ti}-1}{n}f(1)+\frac{n-2}{n}f(x_{ti})+\frac{1}{n} \end{aligned} $$

那么只要对于任意 x 令 $2f(x)=f(x+1)+(x-1)f(1)+1$ 即可。

令 $x=1$，可得 $f(2)=2f(1)-1$，递推即可。

CF 1479E

题解：与上题的思路基本相同：

$$ \begin{aligned} E[\phi(X_{t+1})|X_{t}]=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ti}}{m}\left[f(x_{ti}-1)+f(1)+\sum_{k\neq i}f(x_{tk})\right]\\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{x_{ti}x_{tj}}{m^{2}}\left[f(x_{ti}-1)+f(x_{tj}+1)+\sum_{k\notin\{i,j\}}f(x_{tk})\right]\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{2}_{ti}}{m^{2}}\phi(X_{t})\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{2m^{2}-3mx_{ti}+2x_{ti}^{2}}{2m^{2}}f(x_{ti})+\frac{(m-x_{ti})x_{ti}}{2m^{2}}f(x_{ti}+1)+\frac{2mx_{ti}-x_{ti}^{2}}{2m^{2}}f(x_{ti}-1)+\frac{1}{2}f(1) \end{aligned} $$

由于 $E[\phi(X_{t+1})-\phi(X_{t})|X_{t}]=-1$，因此

$$ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}f(x_{ti})&=\sum_{i=1}^{n}\frac{2m^{2}-3mx_{ti}+2x_{ti}^{2}}{2m^{2}}f(x_{ti})+\frac{(m-x_{ti})x_{ti}}{2m^{2}}f(x_{ti}+1)+\frac{2mx_{ti}-x_{ti}^{2}}{2m^{2}}f(x_{ti}-1)+\frac{1}{2}f(1)+1\\

\sum_{i=1}^{n}\frac{3mx_{ti}-2x_{ti}^{2}}{2m^{2}}f(x_{ti})&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(m-x_{ti})x_{ti}}{2m^{2}}f(x_{ti}+1)+\frac{2mx_{ti}-x_{ti}^{2}}{2m^{2}}f(x_{ti}-1)+\frac{x_{ti}}{2m}f(1)+\frac{x_{ti}}{m} \end{aligned} $$

那么只要对于任意 x 令

$$ \begin{aligned} \frac{3mx-2x^{2}}{2m^{2}}f(x)&=\frac{(m-x)x}{2m^{2}}f(x+1)+\frac{2mx-x^{2}}{2m^{2}}f(x-1)+\frac{x}{2m}f(1)+\frac{x}{m}\\ \frac{m-x}{2m}[f(x+1)-f(x)]&=\frac{2m-x}{2m}[f(x)-f(x-1)]-\frac{1}{2}f(1)-1\\ f(x+1)-f(x)&=\frac{2m-x}{m-x}[f(x)-f(x-1)]-\frac{m}{m-x}f(1)-\frac{2m}{m-x} \end{aligned} $$

即可。

$f(0)$ 需要定义为 0，为了方便，令 $f(1)=-2$令 $g(x)=f(x)-f(x-1)$那么 $g(1)=f(1)-f(0)=-2$有 $g(x+1)=\frac{2m-x}{m-x}g(x)$

本题 x_{i} 很大，因此需要用到根号求阶乘的技巧，因为与本主题无关，在此不做说明。