

随机游走

有一类随机游走问题定义如下：在数轴中 $[0, n]$ 之间的整点上随机走动，走到 0 或点 n 时停止。否则，在点 i 处，分别有 $f(i), g(i), h(i)$ 的概率向左走一步，不动，或者向右走一步，其中 $f(i) + g(i) + h(i) = 1$

首先可以计算出 $P(i)$ 表示从点 i 走到点 n 的概率。那么有

$$P(i) = \begin{cases} 0 & (i=0) \\ f(i)P(i-1) + g(i)P(i) + h(i)P(i+1) & (0 < i < n) \\ 1 & (i=n) \end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned} (f(i) + h(i))P(i) &= f(i)P(i-1) + h(i)P(i+1) \\ f(i)(P(i) - P(i-1)) &= h(i)(P(i+1) - P(i)) \\ P(i) &= \frac{f(i)}{h(i)}(P(i) - P(i-1)) \end{aligned}$$

因此

$$P(i) = P(1) \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=1}^j f(k)}{\prod_{k=1}^j h(k)}$$

那么可以得到 $P(n)$ 与 $P(1)$ 之间的关系，即可解出 $P(1)$ 从而求出所有 P

此外，我们还可以为本题定义一种伪数学期望，它是指能到达点 n 的前提下，游戏进行的期望次数，即 $E(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} i P(i | x_0 = t)$ 这里 $P(i | x_0 = t)$ 是指从 t 出发，恰好在 i 步后走到 n 的概率。

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} i P(i | x_0 = t) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} i (f(i)P(i-1 | x_0 = t-1) + g(i)P(i-1 | x_0 = t) + h(i)P(i-1 | x_0 = t+1)) \\ &= f(t)E(t-1) + g(t)E(t) + h(t)E(t+1) + P(t) \end{aligned}$$

因此

$$f(t)(E(t) - E(t-1)) = h(t)(E(t+1) - E(t)) + P(t)$$

定义 $dE(t) = E(t) - E(t-1)$ 那么

$$\begin{aligned} f(t)dE(t) &= h(t)dE(t+1) + P(t) \\ dE(t+1) &= \frac{f(t)}{h(t)}dE(t) - \frac{1}{h(t)}P(t) \end{aligned}$$

那么这样可以 $\mathcal{O}(n)$ 计算。

如果希望能够在亚线性时间进行计算，可以看到概率尚有比较优美的闭式解，从中可能可以挖掘出一些性质。而对于伪期望，这一方法就行不通了。为了进一步解决类似这样的问题，我们需要引入一些随机过程中的理论。

鞅

设有一随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 若对于一切 n $E[|X_n|] < \infty$ 且 $E[X_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = X_n$ 那么称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为鞅。

随机时间

正整数值（可能取无穷）的随机变量 N 称为随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的随机时间，如果事件

$N=n$ 由随机变量 $X_0, \dots, X_n$ 决定。若 $P(N < \infty) = 1$ 随机时间 N 称为停时。

停止过程

设 N 是过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的随机时间，令

$$\overline{X}_n = \begin{cases} X_n & (n \leq N) \\ X_N & (n > N) \end{cases}$$

形象地说，当随机时间 N 达到之后，随机过程即停止，不再发生变化。

引理 1

若 N 是鞅 $\{X_n\}$ 的随机时间，则停止过程 $\{\overline{X}_n\}$ 也是鞅。

因此 $E[\overline{X}_n] = E[\overline{X}_0] = E[X_0]$

定理 1 (停时定理)

若 N 是鞅 $\{X_n\}$ 的停时，那么 (在一定的正则性条件下) $E[X_N] = E[X_0]$

这是一个重要的定理，为后面的方法奠定了基础。

基本思想

假设有一个随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 及其停时 T 现在要求出 $E[T]$ 但是通常来说 $E(T)$ 并不好求。但是对于随机游走这样的随机过程，不妨构造 X 的一个势函数 $\phi(X)$ 使得

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{n+1}) - \phi(X_n) | X_0, \dots, X_n] &= -1 \quad (n < T) \\ E[\phi(X_{n+1}) - \phi(X_n) | X_0, \dots, X_n] &= 0 \quad (n \geq T) \end{aligned}$$

即每走一步势函数期望减小 1，停时后则不变。

这里需要证明可以构造停时的双射。通常在这类题目中，状态转移是一个马尔可夫过程，且 X 恰有一种状态 X_T 是停止状态，那么我们希望证明 $\phi(X_T)$ 是唯一的。事实上，可以证明 $\phi(X_T)$ 是唯一的最小值。假设它不是唯一的最小值，那么一定存在一个状态 X' 它不是停止状态，且 $\phi(X')$ 是最小值，那么 $E[\phi(X'_1) - \phi(X') | X'] = -1$ 那么显然存在一种状态使得它的值比 $\phi(X')$ 小，矛盾。因此在 ϕ 满足要求的前提下 $\phi(X_T)$ 是唯一的最小值，从而可以在两个随机过程中建立一个停时的双射。

考虑随机过程 $Y_n = \phi(X_n) + \min(n, N)$ 首先证明 Y_n 是鞅：

若 $n < T$ 那么

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n] &= E[Y_{n+1} - Y_n | Y_0, \dots, Y_n] + Y_n \\ &= Y_n \end{aligned}$$

同理 $n \geq T$ 也可证。

根据停时定理 $E[Y_{\{T\}}] = E[Y_{\{0\}}]$ 即 $E[\phi(X_{\{T\}}) + T] = E[\phi(X_{\{0\}}) + 0]$ 因此 $E[T] = \phi(X_{\{0\}}) - \phi(X_{\{T\}})$

下面具体到各个题目讲解 ϕ 的构造。

CF 1349D

题解：设球的总数为 $m = \sum_{i=1}^n x_i$ 定义 $X_{\{t\}} = (x_{\{t1\}}, x_{\{t2\}}, \dots, x_{\{tn\}})$ 考虑势函数 $\phi(X_{\{t\}}) = \sum_{i=1}^n f(x_{\{ti\}})$

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{\{t+1\}}) | X_{\{t\}}] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{x_{\{ti\}}}{m(n-1)} \left[f(x_{\{ti\}} - 1) + f(x_{\{tj\}} + 1) + \sum_{k \notin \{i, j\}} f(x_{\{tk\}}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{\{ti\}}}{m} f(x_{\{ti\}} - 1) + \frac{m - x_{\{ti\}}}{m(n-1)} f(x_{\{ti\}} + 1) + \frac{(m - x_{\{ti\}})(n-2)}{m(n-1)} f(x_{\{ti\}}) \end{aligned}$$

由于 $E[\phi(X_{\{t+1\}}) - \phi(X_{\{t\}}) | X_{\{t\}}] = -1$ 因此

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_{\{ti\}}) &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{\{ti\}}}{m} f(x_{\{ti\}} - 1) + \frac{m - x_{\{ti\}}}{m(n-1)} f(x_{\{ti\}} + 1) + \frac{(m - x_{\{ti\}})(n-2)}{m(n-1)} f(x_{\{ti\}}) + \frac{x_{\{ti\}}}{m} \\ \end{aligned}$$

那么只要对于任意 x 令 $f(x) = \frac{x}{m} f(x-1) + \frac{m-x}{m(n-1)} f(x+1) + \frac{(m-x)(n-2)}{m(n-1)} f(x) + \frac{x}{m}$ 即可。

令 $x=0$ 可得 $f(0) = f(1)$ 不妨令 $f(0) = f(1) = 1$ 即可递推求解。

注意到

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{m} + \frac{m-x}{m(n-1)} \right) f(x) &= \frac{x}{m} f(x-1) + \frac{m-x}{m(n-1)} f(x+1) + \frac{x}{m} \\ \frac{x}{m} [f(x) - f(x-1)] &= \frac{m-x}{m(n-1)} [f(x+1) - f(x)] + \frac{x}{m} \\ f(x+1) - f(x) &= \frac{(n-1)x}{(m-x)} [f(x) - f(x-1)] - 1 \end{aligned}$$

答案为 $\sum_{i=1}^n f(x_{\{0i\}}) - (f(m) + (n-1)f(0))$

CF 850F

题解：与上题的思路基本相同：

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{\{t+1\}}) | X_{\{t\}}] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{x_{\{ti\}} x_{\{tj\}}}{m(m-1)} \left[f(x_{\{ti\}} + 1) + f(x_{\{tj\}} - 1) + \sum_{k \notin \{i, j\}} f(x_{\{tk\}}) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{x_{\{ti\}} (x_{\{ti\}} - 1)}{m(m-1)} \phi(X_{\{t\}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{\{ti\}} (m - x_{\{ti\}})}{m(m-1)} f(x_{\{ti\}} - 1) + \frac{x_{\{ti\}} (m - x_{\{ti\}})}{m(m-1)} f(x_{\{ti\}} + 1) \\ &+ \left(1 - \frac{2x_{\{ti\}} (m - x_{\{ti\}})}{m(m-1)} \right) f(x_{\{ti\}}) \end{aligned}$$

由于 $E[\phi(X_{\{t+1\}}) - \phi(X_{\{t\}}) | X_{\{t\}}] = -1$ 因此

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_{\{ti\}}) &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{\{ti\}} (m - x_{\{ti\}})}{m(m-1)} f(x_{\{ti\}} - 1) + \frac{x_{\{ti\}} (m - x_{\{ti\}})}{m(m-1)} f(x_{\{ti\}} + 1) \\ &+ \left(1 - \frac{2x_{\{ti\}} (m - x_{\{ti\}})}{m(m-1)} \right) f(x_{\{ti\}}) + \frac{x_{\{ti\}}}{m} \end{aligned}$$

那么只要对于任意 x 令 $f(x) = \frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x-1) + \frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x+1) + \left[1 - \frac{2x(m-x)}{m(m-1)}\right]f(x) + \frac{x}{m}$ 即可。

注意到

$$\begin{aligned} \frac{2x(m-x)}{m(m-1)}f(x) &= \frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x-1) + \frac{x(m-x)}{m(m-1)}f(x+1) + \frac{x}{m} \\ f(x+1) - f(x) &= f(x) - f(x-1) - \frac{m-1}{m-x} \end{aligned}$$

注意到令 $x=0$ 得到 $f(0)=f(0)$ 因此 $f(0), f(1)$ 均可任取。本题中 m 较大，但是计算可得 $f(m)=f(0)+m(f(1)-f(0))-(m-1)^2$

CF 1025G

题解：与上题的思路基本相同：

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{t+1})|X_t] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1}{n(n-1)} \left[f(x_{ti}+1) + (x_{tj}-1)f(1) + \sum_{k \notin \{i,j\}} f(x_{tk}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(x_{ti}+1) + \frac{x_{ti}-1}{n} f(1) + \frac{n-2}{n} f(x_{ti}) \end{aligned}$$

由于 $E[\phi(X_{t+1}) - \phi(X_t) | X_t] = -1$ 因此

$$\sum_{i=1}^n f(x_{ti}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{n} f(x_{ti}+1) + \frac{x_{ti}-1}{n} f(1) + \frac{n-2}{n} f(x_{ti}) \right]$$

那么只要对于任意 x 令 $2f(x) = f(x+1) + (x-1)f(1) + 1$ 即可。

令 $x=1$ 可得 $f(2) = 2f(1) - 1$ 递推即可。

CF 1479E

题解：与上题的思路基本相同：

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{t+1})|X_t] &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_{ti}}{m} \left[f(x_{ti}-1) + f(1) + \sum_{k \neq i} f(x_{tk}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{x_{ti}x_{tj}}{m^2} \left[f(x_{ti}-1) + f(x_{tj}+1) + \sum_{k \notin \{i,j\}} f(x_{tk}) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_{ti}^2}{m^2} \phi(X_t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2m^2 - 3mx_{ti} + 2x_{ti}^2}{2m^2} f(x_{ti}) + \frac{(m-x_{ti})x_{ti}}{2m^2} f(x_{ti}+1) + \frac{2mx_{ti} - x_{ti}^2}{2m^2} f(x_{ti}-1) + \frac{1}{2} f(1) \end{aligned}$$

由于 $E[\phi(X_{t+1}) - \phi(X_t) | X_t] = -1$ 因此

$$\sum_{i=1}^n f(x_{ti}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{2m^2 - 3mx_{ti} + 2x_{ti}^2}{2m^2} f(x_{ti}) + \frac{(m-x_{ti})x_{ti}}{2m^2} f(x_{ti}+1) + \frac{2mx_{ti} - x_{ti}^2}{2m^2} f(x_{ti}-1) + \frac{1}{2} f(1) + 1 \right]$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{3mx_{ti} - 2x_{ti}^2}{2m^2} f(x_{ti}) = \sum_{i=1}^n \frac{(m-x_{ti})x_{ti}}{2m^2} f(x_{ti}+1) + \frac{2mx_{ti} - x_{ti}^2}{2m^2} f(x_{ti}-1) + \frac{x_{ti}}{2m} f(1) + \frac{x_{ti}}{m}$$

那么只要对于任意 x 令

$$\frac{3mx - 2x^2}{2m^2} f(x) = \frac{(m-x)x}{2m^2} f(x+1) + \frac{2mx - x^2}{2m^2} f(x-1) + \frac{x}{2m} f(1) + \frac{x}{m} \\ \frac{m-x}{2m} [f(x+1) - f(x)] = \frac{2m-x}{m-x} [f(x) - f(x-1)] - \frac{m-x}{m} f(1) - \frac{m-x}{m} f(x) \\ f(x+1) - f(x) = \frac{2m-x}{m-x} [f(x) - f(x-1)] - \frac{m-x}{m} f(1) - \frac{m-x}{m} f(x)$$

即可。

$f(0)$ 需要定义为 0 ，为了方便，令 $f(1) = -2$ 令 $g(x) = f(x) - f(x-1)$ 那么 $g(1) = f(1) - f(0) = -2$ 有 $g(x+1) = \frac{2m-x}{m-x} g(x)$

本题 x_i 很大，因此需要用到根号求阶乘的技巧，因为与本主题无关，在此不做说明。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:random_walk

Last update: 2021/03/31 22:26