

Reeds-Sloane 算法

算法介绍

Reeds-Sloane 算法是 BM 算法的拓展，可以处理模任意正整数的递推式。

设环 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上有一数列 s_0, s_1, \dots, s_{n-1} 我们想要找到一个尽可能短的数列 $a_0=1, a_1, \dots, a_l$ 使得 $\sum_{i=0}^l a_i s_{j-i} = 0$ 对 $j=l+1, \dots, n-1$ 成立。

不妨用多项式的语言来简单地定义一下递推式的长度：设

$a(x) = \sum_{i=0}^l a_i x^i$ $S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i x^i$ $a(x)S(x) \equiv b(x) \pmod{x^n}$ 定义二元组 $A=(a(x), b(x))$ 其长度 $L(A) = \max\{\deg(a(x)), \deg(b(x)) + 1\}$ 当 $\deg(a(x)) \leq \deg(b(x))$ 时可能有些不好理解，这里可以当做是 a 后面补充了一些 0 ，以跳过开始若干不满足递推式的项。

中国剩余定理

设 $m = \prod p_i^{e_i}$ 假设我们能够对每个 $p_i^{e_i}$ 求出递推式，那么对递推式的每一项做 crt 即可得到模 m 意义下的一个递推式，且显然长度不变。当然也容易证明不存在比这长度更短的递推式，否则对于递推式最长的那个质因子会产生矛盾。因此我们将问题归约到了模质数的幂。下面设模数为 p^e

算法介绍

Reeds-Sloane 算法事实上解决了一个更加 general 的问题，即对每个 $\eta=0, 1, \dots, e-1$ 求出 $a(0)=p^\eta$ 时的最短递推式。算法的基本流程是对 s 的每个前缀依次处理。

首先定义几个记号 $a_\eta^{(k)}(x)$ 表示 $a(0)=p^\eta$ 时， s_0, \dots, s_k 的递推式 $b_\eta^{(k)}(x)$ 是右边的余数 $A_\eta^{(k)} = (a_\eta^{(k)}(x), b_\eta^{(k)}(x))$ 将 $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ 简记为 R 设 R 中可逆的元素为 R^*

引理 1

设 $E_\eta^{(k)}$ 表示所有满足 $a(x)S(x) \equiv b(x) \pmod{x^k}$ $a(0)=p^\eta$ 的二元组 $(a(x), b(x))$ $B_\eta^{(k)}$ 表示所有满足 $a(x)S(x) \equiv b(x) + \theta p^\eta x^k \pmod{x^{k+1}}$ 的二元组 $(a(x), b(x))$ 其中 $\theta \in R^*$

设 $(a(x), b(x)) \in E_\eta^{(k)}$ $(c(x), d(x)) \in B_u^{(k-1)}$ 且 $\eta + u < e$ 那么 $L(a(x), b(x)) + L(c(x), d(x)) \geq k$

证明：

$$\begin{aligned} a(x)S(x) &\equiv b(x) \pmod{x^k} \\ c(x)S(x) &\equiv d(x) + \theta p^u x^{k-1} \pmod{x^k} \\ c(x)a(x)S(x) &\equiv a(x)d(x) + \theta p^u x^{k-1} a(x) \pmod{x^k} \\ c(x)b(x) - a(x)d(x) &\equiv \theta p^u x^{k-1} a(x) \pmod{x^k} \end{aligned}$$

$\end{aligned}$ \$\$

注意到等号右侧的最低次项是 x^{k-1} 系数为 $\theta p^{\eta+u} \not\equiv 0$ 因此

$$\begin{aligned} \deg(c(x)b(x)-a(x)d(x)) &\geq k-1 \\ \max\{\deg(c(x)b(x)), \deg(a(x)d(x))\} &\geq k-1 \\ \max\{\deg(c(x))+\deg(b(x))+1, \deg(a(x))+\deg(d(x))+1\} &\geq k \\ \max\{\deg(a(x)), \deg(b(x))+1\} + \max\{\deg(c(x)), \deg(d(x))+1\} &\geq k \\ L(a(x), b(x)) + L(c(x), d(x)) &\geq k \end{aligned}$$

初始化

令
 $a_{\eta}^{(0)}(x) = p^{\eta}$, $b_{\eta}^{(0)} = 0$, $a_{\eta}^{(1)}(x) = p^{\eta}$, $b_{\eta}^{(1)}(x) = p^{\eta} S_0$
 $L(A_{\eta}^{(0)}) = 0$ 定义 $S_0 = \delta p^{\epsilon}$ 其中 $\delta \in \mathbb{R}^*$
 若 $\eta + \epsilon < e$ 则 $L(A_{\eta}^{(1)}) = 1$ 否则 $L(A_{\eta}^{(1)}) = 0$ 这两处的 L 显然是最小的。

另外我们定义 $\theta_{\eta k}$ 和 $u_{\eta k}$ 满足 $S(x) a_{\eta}^{(k)}(x) \equiv b_{\eta}^{(k)}(x) + \theta_{\eta k} p^{u_{\eta k}} x^k \pmod{x^{k+1}}$ 其中 $\theta_{\eta k} \in \mathbb{R}^*$
 $0 \leq u_{\eta k} \leq e$ 例如在初始化中, 若 $\eta + \epsilon < e$ 那么可以令
 $\theta_{\eta 0} = \delta$, $u_{\eta 0} = \eta + \epsilon$ 否则可以令
 $\theta_{\eta 0} = 1$, $u_{\eta 0} = e$

递推计算

考虑对每个 η 计算 k 变化到 $k+1$ 时的答案。我们归纳地证明 $L(A_{\eta}^{(k)})$ 是最小的, 以及 $L(A_{\eta}^{(k)}) < L(A_{\eta}^{(k+1)})$ 时, 存在一个 $0 \leq g < e$ 使得 $\eta + u_{gk} < e$ 并且 $L(A_{\eta}^{(k+1)}) = k+1 - L(A_g^{(k)})$

- 若 $u_{\eta k} = e$ 那么令 $A_{\eta}^{(k+1)} = A_{\eta}^{(k)}$ 显然 $\mathscr{E}_{\eta}^{(k+1)}$ 中的最短的元素要大于等于 $\mathscr{E}_{\eta}^{(k)}$ 中最短的元素, 而我们又归纳假设 $A_{\eta}^{(k)}$ 是最短的元素, 因此 $A_{\eta}^{(k+1)}$ 也是最短的元素。
- 若 $u_{\eta k} < e$ 令 $g = e - 1 - u_{\eta k}$ 并且记 $f(\eta, k) = g$ 下面再分两种情况讨论:
 - 若 $L(A_g^{(k)}) = 0$ 那么令 $A_{\eta}^{(k+1)} = A_{\eta}^{(k)} + (0, \theta_{\eta k} p^{u_{\eta k}} x^k)$ 显然有 $L(A_{\eta}^{(k+1)}) = k+1$

由于 $L(A_g^{(k)}) = 0$ 每个 s_0, \dots, s_{k-1} 都是 p^{e-g} 的倍数, 不妨设 $s_i = p^{e-g} s'_i$ ($0 \leq i \leq k-1$) 又由 θ_{gk} 和 u_{gk} 的定义有 $s_k p^g = \theta_{gk} p^{u_{gk}}$ 从而有 $(p^{e-g} (s'_0 + s'_1 x + \dots + s'_{k-1} x^{k-1}) + \theta_{gk} p^{u_{gk}} - g) x^k \equiv b_{\eta}^{(k)}(x) + \theta_{\eta k} p^{u_{\eta k}} x^k \pmod{x^{k+1}}$

另外注意到 $b_{\eta}^{(k)}$ 是在 $\mathbb{F}_p[x^k]$ 意义下的，从而度数小于等于 $k-1$ 。比较 x^k 的系数，有 $\alpha p^{e-g} + \theta_{gk} p^{u_{gk} + \eta - g} = \theta_{\eta k} p^{u_{\eta k}}$ 。又由于 $e-g = u_{\eta k} + 1$ 而 $\theta_{gk}, \theta_{\eta k} \in \mathbb{R}^*$ 因此 $u_{gk} + \eta - g \leq u_{\eta k}$ 。另外有 $A_{\eta}^{(k+1)} \in \mathbb{E}_{\eta}^{(k+1)}$ ， $A_g^{(k)} \in \mathbb{B}_{u_{gk}}^{(k)}$ 从而 $L(A_{\eta}^{(k+1)}) + L(A_g^{(k)}) \geq k+1$ 因此 $L(A_{\eta}^{(k+1)})$ 取到了最小值。

- 若 $L(A_g^{(k)}) > 0$ 那么一定存在唯一的一个 r 使得 $L(A_g^{(r)}) < L(A_g^{(r+1)}) = L(A_g^{(k)})$ 。由归纳假设可知 $g + u_{hr} < e$ 又 $g = e - 1 - u_{\eta k}$ 从而 $u_{hr} \leq u_{\eta k}$ 。

我们令 $a_{\eta}^{(k+1)} = a_{\eta}^{(k)}(x) - \theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} a_h^{(r)}(x)$ ， $b_{\eta}^{(k+1)} = b_{\eta}^{(k)}(x) - \theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} b_h^{(r)}(x)$ 。

我们来验证 $a_{\eta}^{(k+1)} S(x) \equiv b_{\eta}^{(k+1)}(x) \pmod{x^{k+1}}$ 。

$$\begin{aligned} a_{\eta}^{(k+1)}(x) S(x) &\equiv a_{\eta}^{(k)}(x) S(x) - \theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} a_h^{(r)}(x) S(x) \\ &\equiv b_{\eta}^{(k)}(x) + \theta_{\eta k} p^{u_{\eta k}} x^k - \theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} a_h^{(r)}(x) S(x) \\ &\equiv b_{\eta}^{(k)}(x) - \theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} (-\theta_{hr} p^{u_{hr}} x^r + a_h^{(r)}(x) S(x)) \\ &\equiv b_{\eta}^{(k)}(x) - \theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} b_h^{(r)}(x) \\ &\equiv b_{\eta}^{(k+1)}(x) \pmod{x^{k+1}} \end{aligned}$$

如果 $L(A_{\eta}^{(k)}) = L(A_{\eta}^{(k+1)})$ 命题自然成立，下面假设 $L(A_{\eta}^{(k)}) < L(A_{\eta}^{(k+1)})$ 。

根据归纳假设 $L(A_h^{(r)}) + L(A_g^{(r+1)}) = r+1$ 我们来考虑 $L(A_{\eta}^{(k+1)}) = (a_{\eta}^{(k+1)}(x), b_{\eta}^{(k+1)}(x))$ 的度数：

$$\begin{aligned} L(A_{\eta}^{(k+1)}) &\leq \max\{\deg a_{\eta}^{(k)}(x), \deg(\theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} a_h^{(r)}(x)), \deg b_{\eta}^{(k)}(x), \\ &\quad \deg(\theta_{\eta k} \theta_{hr}^{-1} p^{u_{\eta k} - u_{hr}} x^{k-r} b_h^{(r)}(x))\} \\ &\leq \max\{\deg a_{\eta}^{(k)}(x), k-r + \deg a_h^{(r)}(x), \deg b_{\eta}^{(k)}(x), k-r + \deg \end{aligned}$$

$$b_{h}^{\{r\}}(x) \leq \max\{L(A_{\eta}^{\{k\}}), k-r+L(A_{h}^{\{r\}})\} \\
 \leq \max\{L(A_{\eta}^{\{k\}}), k+1-L(A_{g}^{\{r+1\}})\} \leq \max\{L(A_{\eta}^{\{k\}}), k+1-L(A_{g}^{\{k\}})\}$$

由于 $L(A_{\eta}^{\{k\}}) < L(A_{\eta}^{\{k+1\}})$ 因此 $L(A_{\eta}^{\{k+1\}}) \leq k+1-L(A_{g}^{\{k\}})$ 考虑多项式 $q(x) = a_{\eta}^{\{k\}}(x)a_{g}^{\{k\}}(x)S(x) - b_{g}^{\{k\}}(x) - a_{g}^{\{k\}}(x)a_{\eta}^{\{k\}}(x)S(x) - b_{\eta}^{\{k\}}(x) = a_{g}^{\{k\}}(x)b_{\eta}^{\{k\}}(x) - a_{\eta}^{\{k\}}(x)b_{g}^{\{k\}}(x)$ 与引理 1 类似 $\deg q(x) \leq L(A_{\eta}^{\{k\}}) + L(A_{g}^{\{k\}}) - 1 \leq k-1$ 但是注意到 $b_{\eta}^{\{k\}}(x)$ 和 $b_{g}^{\{k\}}(x)$ 中最低也只有 k 次项，因此 $q(x) = 0$ 比较 x^k 项的系数可得 $p^{g+u_{\eta k}} \theta_{\eta k} - p^{\eta+u_{gk}} \theta_{gk} = 0$ 因此 $g+u_{\eta k} = \eta+u_{gk} = e-1$ 与上一种情况类似 $L(A_{\eta}^{\{k+1\}}) \geq k+1-L(A_{g}^{\{k\}})$ 从而 $L(A_{\eta}^{\{k+1\}}) = k+1-L(A_{g}^{\{k\}})$

附注

两个实现时的数值分析与 BM 算法类似，从而有：对于一个由 k 阶矩阵转移而来的数列，至多需要 $2k$ 项即可由 RS 算法计算出递推式。

例题

暂时没有见到如此丧心病狂的出题人，不过应用场景与 BM 算法类似，可参考 BM 算法的例题。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:rs&rev=1590379565>

Last update: 2020/05/25 12:06