

序列求和V5学习及拓展

首先膜鏞~~

问题很简单，求 $\sum_{i=1}^n i^k b^i$ 原问题是对一个质数取模，这里我们拓展为对一个质数的幂 p^e 取模。下面分为三类讨论：

- 若 $b \equiv 0 \pmod{p}$ 那么我们至多只要求前 e 项即可。
- 若 $b \equiv 1 \pmod{p}$ 设 $b = up + 1$ 那么原式等于
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^k (up+1)^i &= \sum_{i=1}^n i^k \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (up)^j \\ &= \sum_{i=1}^n i^k \sum_{j=0}^{e-1} \binom{i}{j} (up)^j \\ &= \sum_{j=0}^{e-1} (up)^j \sum_{i=1}^n i^k \binom{i}{j} \end{aligned}$$
 注意到 $\binom{i}{j}$ 是一个关于 i 的 j 次多项式，因此上式是一个关于 i 的 $k+e$ 次多项式。使用插值计算即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(k+e+\log_p n)$
- 其它情况（以下做法来源于[tls的题解](#)）

记所求式子为 $f(n)$

首先我们证明：原式可被表示为 $f(n) = b^n F(n) - F(0)$ 其中 F 是关于 n 的某个 k 次多项式。

$k=0$ 时：
$$f(n) = \sum_{i=1}^n b^i = \frac{b^{n+1} - b}{b-1} = b^n \cdot \frac{b}{b-1} - \frac{b}{b-1}$$
 显然成立。

$k \geq 1$ 时：
$$\begin{aligned} bf(n) - f(n) &= \sum_{i=1}^n i^k b^{i+1} - \sum_{i=1}^n i^k b^i \\ &= n^k b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} i^k (b^{i+1} - b^i) \\ &= n^k b^{n+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (-1)^j \sum_{i=1}^n i^{k-j} b^{i+1} \\ &= n^k b^{n+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (-1)^j (b \sum_{i=1}^n i^{k-j} b^i - \sum_{i=1}^n i^{k-j} b^i) \\ &= b^{n+1} n^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (-1)^j b F_{k-j}(n) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (-1)^j F_{k-j}(0) \end{aligned}$$
 也成立。这意味着 $F_k(n) = bn^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (-1)^j F_j(n)$

现在我们只要求出 $F(0), \dots, F(k)$ 即可插值求出 $f(n)$ 。设 $F(0)=x$ 那么我们很容易用 x 来表示 $F(n)=\frac{f(n)+x}{b^n}$ 。下面我们证明 $\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} F(i)=0$ 对于任何 k 次多项式都成立。这样我们就得到了一个一次方程，可以解出 x 。

首先证明一个引理：对任意 $0 \leq j \leq k$ $\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} \binom{i}{j} = 0$
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} \binom{i}{j} &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} \binom{k+1-j}{i-j} \\ &= \binom{k+1}{j} \sum_{i=0}^{k+1-j} (-1)^{i+j} \binom{k+1-j}{i} = 0 \end{aligned}$$
 而 $F(i)$ 可以表示为 $\binom{i}{0}, \binom{i}{1}, \dots, \binom{i}{k}$ 的线性组合，那么之前的结论是显然的。

另外注意到这个一次方程的未知数的系数是 $\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} \left(\frac{1}{b}\right)^i = \left(\frac{b-1}{b}\right)^{k+1}$ 而 b 模 p 不为 0 或 1 ，因此这个方程是有唯一解的。

时间复杂度 $\mathcal{O}(k + \log_p x)$

时间复杂度不一定准确

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:sequence_sum_v5

Last update: 2021/11/14 22:18