

# 序列求和V5学习及拓展

首先膜糖~~

问题很简单，求  $\sum_{i=1}^n i^k b^i$  原问题是对一个质数取模，这里我们拓展为对一个质数的幂  $p^e$  取模。下面分为三类讨论：

- 若  $b \equiv 0 \pmod{p}$  那么我们至多只要求前  $e$  项即可。
- 若  $b \equiv 1 \pmod{p}$  设  $b=up+1$  那么原式等于 
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^k (up+1)^i &= \sum_{i=1}^n i^k \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (up)^j \\ &= \sum_{j=0}^{e-1} (up)^j \sum_{i=1}^n i^k \binom{i}{j} \end{aligned}$$
 注意到  $\binom{i}{j}$  是一个关于  $i$  的  $j$  次多项式，因此上式是一个关于  $i$  的  $k+e$  次多项式。使用插值计算即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(k+e \log_p x)$
- 其它情况（以下做法来源于 [tls](#) 的题解）

记所求式子为  $f(n)$

首先我们证明：原式可被表示为  $f(n) = b^n F(n) - F(0)$  其中  $F$  是关于  $n$  的某个  $k$  次多项式。

$k=0$  时：
$$f(n) = \sum_{i=1}^n b^i = \frac{b^{n+1} - b}{b-1} = b^n \cdot \frac{b}{b-1} - \frac{b}{b-1}$$
 显然成立。

$k \geq 1$  时：
$$\begin{aligned} bf(n) - f(n) &= \sum_{i=1}^n i^k b^{i+1} - \sum_{i=1}^n i^k b^i \\ &= n^k b^{n+1} + \sum_{i=1}^n b^i \left[ (i-1)^k - i^k \right] \\ &= n^k b^{n+1} + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \sum_{i=1}^n i^j b^i \\ &= n^k b^{n+1} + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \left[ b^n F_j(n) - F_j(0) \right] \\ &= b^n \left[ bn^k + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} F_j(n) \right] - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} F_j(0) \end{aligned}$$
 也成立。这意味着  $F_k(n) = bn^k + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} F_j(n)$

现在我们只要求出  $F(0), \dots, F(k)$  即可插值求出  $f(n)$ 。设  $F(0)=x$  那么我们很容易用  $x$  来表示  $F(n)$ 。
$$F(n) = \frac{f(n)+x}{b^n}$$
 下面我们证明  $\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} F(i) = 0$  对于任何  $k$  次多项式都成立。这样我们就得到了一个一次方程，可以解出  $x$ 。

首先证明一个引理：对任意  $0 \leq j \leq k$  
$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} \binom{i}{j} = 0$$
 
$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{j} \binom{k+1-j}{i-j} \\ &= \binom{k+1}{j} \sum_{i=0}^{k+1-j} (-1)^{i+j} \binom{k+1-j}{i} = 0 \end{aligned}$$
 而  $F(i)$  可以表示为  $\binom{i}{0}, \binom{i}{1}, \dots, \binom{i}{k}$  的线性组合，那么之前的结论是显然的。

另外注意到这个一次方程的未知数的系数是  $\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} \left(\frac{1}{b}\right)^i = \left(\frac{b-1}{b}\right)^{k+1}$  而  $b$  模  $p$  不为  $0$  或  $1$ ，因此这个方程是有唯一解的。

时间复杂度  $\mathcal{O}(k + \log_p x)$

时间复杂度不一定准确

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:sequence\\_sum\\_v5](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:sequence_sum_v5)

Last update: 2021/11/14 22:18