

先看看 序列求和 V5

先介绍一些前置知识。对于形式幂级数 $f(x)$ 可定义形式微分算子 D 即

$Df(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} i f_i x^{i-1}$ 可对 D 定义形式幂级数 $A(D)$ 即

$A(D)f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i D^i f(x)$ 显然 D 的形式幂级数满足加法的分配率，即

$A(D)f(x) + B(D)f(x) = (A(D) + B(D))f(x)$ 它还满足乘法的结合率，即 $A(D)(B(D)f(x)) = (A(D)B(D))f(x)$ 这一点可以从定义中看出。根据以上性质，还可以定义微分算子形式幂级数的逆，即

$A(D)f(x) = g(x) \Leftrightarrow A^{-1}(D)(A(D)f(x)) = f(x) = A^{-1}(D)g(x)$

对任意形式幂级数 $f(x)$ 有 $f(x+1) = e^D f(x)$ 这一点可以根据二项式定理证明。

回到题目。已知 $F(x)$ 是一个 k 次多项式，且满足 $b^n F(n) - F(0) = \sum_{i=1}^n i^k b^i$

那么

$$\begin{aligned} b^{n+1}F(n+1) - F(0) &= \sum_{i=1}^{n+1} i^k b^i \\ b^{n+1}F(n+1) - b^n F(n) &= (n+1)^k b^{n+1} \\ b^n F(n) - F(0) &= \sum_{i=1}^n i^k b^i \end{aligned}$$

可以首先把 $\frac{b}{b^D - 1}$ 求出，然后对多项式求 k 个不同的导看似是 k^2 的，实际上想想可以发现是个卷积形式。

$b=1$ 时 $\frac{1}{e^D - 1}$ 是不存在的，但是此时可以发现

$\frac{e^D - 1}{D} (DF(n)) = (n+1)^k$ 即可求出 $DF(n)$ 且已知 $F(n)$ 常数项为 0 ，积分即可。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:sequence_sum_v5_v2

Last update: 2022/05/09 22:10