先看看 序列求和 V5□

先介绍一些前置知识。对于形式幂级数 $f(x)$ 可定义形式微分算子 D□即 $Df(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}if_{i}x^{i-1}$□可对 D 定义形式幂级数 $A(D)$□即 $A(D)f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_{i}D^{i}f(x)$□显然 D 的形式幂级数满足加法的分配率，即 $A(D)f(x)+B(D)f(x)=(A(D)+B(D))f(x)$□它还满足乘法的结合率，即 $A(D)(B(D)f(x))=(A(D)B(D))f(x)$□这一点可以从定义中看出。根据以上性质，还可以定义微分算子形式幂级数的逆，即 $A(D)f(x)=g(x)\Leftrightarrow A^{-1}(D)(A(D)f(x))=f(x)=A^{-1}(D)g(x)$□

对任意形式幂级数 $f(x)$□有 $f(x+1)=e^{D}f(x)$□这一点可以根据二项式定理证明。

回到题目。已知 $F(x)$ 是一个 k 次多项式，且满足 $b^{n}F(n)-F(0)=\sum_{i=1}^{n}i^{k}b^{i}$□那么

$$ \begin{aligned} b^{n+1}F(n+1)-F(0)&=\sum_{i=1}^{n+1}i^{k}b^{i}\\ b^{n+1}F(n+1)-b^{n}F(n)&=(n+1)^{k}b^{n+1}\\ bF(n+1)-F(n)&=b(n+1)^{k}\\ (be^{D}-1)F(n)&=b(n+1)^{k}\\ F(n)&=\frac{b}{be^{D}-1}(n+1)^{k} \end{aligned} $$

可以首先把 $\frac{b}{be^{D}-1}$ 求出，然后对多项式求 k 个不同的导看似是 k^{2} 的，实际上想想可以发现是个卷积形式。

$b=1$ 时 $\frac{1}{e^{D}-1}$ 是不存在的，但是此时可以发现 $\frac{e^{D}-1}{D}(DF(n))=(n+1)^{k}$□即可求出 $DF(n)$□且已知 $F(n)$ 常数项为 0，积分即可。