

设有两个集合 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ 且 $0 \in A, 1 \in B, |A|=n, |B|=m$ 定义 $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ 若 $A+B = [1, nm] \cap \mathbb{N}^{\{+\}}$ 则称 (A, B) 是好的。问这样的集合对有多少个。

解：若 $n=1$ 或 $m=1$ 方案显然是唯一的。下面讨论 $n>1$ 且 $m>1$ 的情况：

若 $2 \notin B$ 那么必有 $1 \in A$ 否则 $2 \notin A+B$ 矛盾。这种情况下，我们把 A 中所有元素加 1 B 中所有元素减 1 即可 (n, m 互换)。因此下面假定 $1 \in B, 2 \in B$

首先证明，对于一个固定的 B 至多只有一个 A 满足要求。不妨从小到大向 A 集合中填数，设 A 中一开始只有 0 。考虑当前 $A+B$ 中的所有元素，如果 $\{1, 2, \dots, nm\} \subseteq A+B$ 那么填数终止；否则考虑 $\{1, 2, \dots, nm\}$ 中最小的不在 $A+B$ 中的元素，设为 x 那么我们必须把 $x-1$ 填进 A 反证法，假设 $x-1 \notin A$ 那么必然存在某个 $t>1, t \in B$ 我们要把 $x-t$ 填进 A 这样一来 $x-t+1$ 就有两种表示方法（填 $x-t$ 之前的一种，和 $(x-t)+(1)$ 的一种），从而最后的集合对不可能是合法的。这样的填法说明了 A 的取值是唯一的。

接下来的问题就变成了，对于怎样的集合 B 它恰好有一个 A 是合法的。

给出一个整数 t 和两个长度为 l 的数列 $\{x_i\}, \{y_i\}$ 其中 $t>1, x_i > 1 (1 \leq i \leq l), y_i > 1 (1 \leq i \leq l)$ 我们递归地定义 A 和 B 设 $A_0 = \{0\}, B_0 = \{1, 2, \dots, t\}$
$$u_i = t \prod_{j=1}^{i-1} x_j \prod_{j=1}^{i-1} y_j$$

$$v_i = t \prod_{j=1}^i x_j \prod_{j=1}^{i-1} y_j$$

$$A_i = A_{i-1} + \{0, u_i, 2u_i, \dots, (x_i-1)u_i\}$$

$$B_i = B_{i-1} + \{0, v_i, 2v_i, \dots, (y_i-1)v_i\}$$

$$A = A_l, B = B_l$$
 容易发现，这样的一组 (A, B) 是好的，且对于不同的参数 t, x, y 生成的 (A, B) 互不相同。

我们从构造上式的角度出发，说明好的 (A, B) 必然满足上面的形式。由于 $t+1 \notin B$ 因此有 $t \in A$ 可得 $t+2, \dots, 2t \notin B$ 否则 $t+i = (0) + (t+i) = (t) + (i)$ 同理若 $2t+1 \notin B$ 则有 $2t \in A, 2t+1, \dots, 3t \notin B$ 设 $t+1, \dots, x_1 t \notin B$ 那么 $0, t, \dots, (x_1-1)t \in A$ 接下来，若 $x_1 t+1 \in B$ 那么就有 $[x_1 t+u \in B] = [u \in B] (1 \leq u \leq x_1 t)$ 另外还有 $x_1 t \notin A$ 如此循环往复地构造下去，就能得到上面的结论。

接下来就比较简单了，选择 t, x, y 的过程，相当于将 n, m 分解为若干个数的积 $2 \in B$ 部分的答案为
$$f(n, m) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i(n) \left(g_i(m) + g_{i+1}(m) \right)$$
 其中 $g_i(n)$ 表示将 n 分解为 i 个大于 1 的数的乘积的方案数（有序）。最终答案为 $f(n, m) + f(m, n)$

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepid:zhongzihao:set_counting

Last update: 2021/04/01 23:08