

某个最大反链问题

给定一个非负整数数列 $\{t_i\}$ 定义偏序集 $S = \prod_{i=1}^n \{x \mid 0 \leq x \leq t_i\}$ 其中 $\vec{x} \preceq \vec{y}$ 当且仅当 $\forall 1 \leq i \leq n, x_i \leq y_i$ 那么 S 的最大反链的大小等于关于 x_i 的不定方程
$$\sum_{i=1}^n x_i = \lfloor \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{2} \rfloor$$
 满足 $\forall 1 \leq i \leq n, 0 \leq x_i \leq t_i$ 的整数解的个数。

证明：将该问题用整除来描述：设有整数 n 考虑其所有约数组成的集合 S 定义 $x \preceq y$ 当且仅当 $x \mid y$ 定义 $\deg x$ 为其（可重）质因子数。设 $\deg n = m$ 定义 $C = \{x \mid \deg x = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$ 我们证明 S 的最大反链大小为 $|C|$ 其中 C 显然是一个满足要求的解。

定义对称链为一个序列 $d_1, d_2, \dots, d_h$ 其中 $\deg d_1 + \deg d_h = m$ $\forall 1 \leq i < h, \frac{d_{i+1}}{d_i}$ 为质数。下面证明一个引理 S 可被划分为若干条对称链。

对 n 的质因子数量进行归纳 $n=1$ 时结论显然成立。考虑 $n' = np^k$ 对于 S 的每条链与 $p^0, p^1, \dots, p^k$ 做笛卡尔积，考虑构造出若干条新对称链：

$$\begin{matrix} d_1 & d_2 & \dots & d_h \\ d_1 p & d_2 p & \dots & d_h p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 p^k & d_2 p^k & \dots & d_h p^k \end{matrix}$$

在上面的矩形中，每次取第一列和最后一行拼接成一条新链，即 $d_1, d_1 p, \dots, d_1 p^k, d_2 p^k, \dots, d_h p^k$ 显然这是一条对称链。引理证毕。

在每一条对称链中，至多含有一个 C 中的元素，由于 $\deg$ 对称且连续，至少含有一个 C 中的元素。因而对称链的数量恰为 $|C|$ 根据 Dilworth 定理，原命题成立。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepid:word:zhongzihao:some_antichain

Last update: 2021/09/16 21:11