某个最大反链问题

给定一个非负整数数列 $\{t_{i}\}$，定义偏序集 $S=\prod_{i=1}^{n}\{x|0\le x\le t_{i},x\in\mathbb{Z}\}$，其中 $\vec{x}\preceq\vec{y}$ 当且仅当 $\forall 1\le i\le n,x_{i}\le y_{i}$，那么 S 的最大反链的大小等于关于 x_{i} 的不定方程 $\displaystyle{\sum_{i=1}^{n}x_{i}=\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{n}t_{i}}{2}\rfloor}$ 满足 $\forall 1\le i\le n, 0\le x_{i}\le t_{i}$ 的整数解的个数。

证明：将该问题用整除来描述：设有整数 n，考虑其所有约数组成的集合 S，定义 $x\preceq y$ 当且仅当 $x\mid y$，定义 $\deg x$ 为其（可重）质因子数。设 $\deg n=m$，定义 $C=\{x|\deg x=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$，我们证明，$S$ 的最大反链大小为 $|C|$，其中 C 显然是一个满足要求的解。

定义对称链为一个序列 $d_{1},d_{2},\cdots,d_{h}$，其中 $\deg d_{1}+\deg d_{h}=m$，$\forall 1\le i<h,\frac{d_{i+1}}{d_{i}}$ 为质数。下面证明一个引理，S 可被划分为若干条对称链。

对 n 的质因子数量进行归纳，$n=1$ 时结论显然成立。考虑 $n'=np^{k}$，对于 S 的每条链与 $p^{0},p^{1},\cdots,p^{k}$ 做笛卡尔积，考虑构造出若干条新对称链：

$$ \begin{matrix} d_{1}&d_{2}&\cdots&d_{h}\\ d_{1}p&d_{2}p&\cdots&d_{h}p\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ d_{1}p^{k}&d_{2}p^{k}&\cdots&d_{h}p^{k} \end{matrix} $$

在上面的矩形中，每次取第一列和最后一行拼接成一条新链，即 $d_{1},d_{1}p,\cdots,d_{1}p^{k},d_{2}p^{k},\cdots,d_{h}p^{k}$，显然这是一条对称链。引理证毕。

在每一条对称链中，至多含有一个 C 中的元素，由于 $\deg$ 对称且连续，至少含有一个 C 中的元素。因而对称链的数量恰为 $|C|$，根据 Dilworth 定理，原命题成立。