

竞赛图的性质

竞赛图是指任意两点间恰有一条有向边的有向图。简记 $u \rightarrow v$ 表示 u 到 v 存在一条有向边。

性质 1

任意竞赛图都存在一条哈密顿通路。

证明 $n=1$ 时显然 $n \geq 2$ 时，考虑归纳法，设 $n-1$ 时的哈密顿通路为 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ 新加入 n 时，若存在 i 使得 $p_i \rightarrow n$ 且 $n \rightarrow p_{i+1}$ 那么将 n 放在 p_i 之后即可。

否则，假如所有点都向 n 有边，将 n 放在 p_{n-1} 后即可，反之亦然。

否则，必然有 $p_{n-1} \rightarrow n$ 且 $n \rightarrow p_1$ 那么 $p_2, \dots, p_{n-1}, n, p_1$ 满足要求。

性质 2

任意强连通的竞赛图都存在一条哈密顿回路。

证明 $n \leq 3$ 时显然 $n \geq 4$ 时，考虑归纳法，设 $n-1$ 时的哈密顿回路为 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ 新加入 n 时，若存在 i 使得 $p_i \rightarrow n$ 且 $n \rightarrow p_{i+1}$ 那么将 n 放在 p_i 之后即可。

否则，由于图强连通，不可能所有点都向 n 有边或 n 向所有点有边。因此必然有 $p_{n-1} \rightarrow n$ 且 $n \rightarrow p_1$ 那么 $p_2, \dots, p_{n-1}, n, p_1$ 满足要求。

性质 3

任意竞赛图强连通分量缩点之后，所有边必然由拓扑序小的点指向拓扑序大的点。

证明：缩点之后的图存在一个哈密顿通路，这条通路显然是按拓扑序排序的。假如存在一条由拓扑序大的点指向拓扑序小的点的边，会产生一个环，与该图是 DAG 矛盾。

性质 4

若某个竞赛图存在一个长度为 $n(n \geq 4)$ 的环，那么存在一个长度为 $n-1$ 的环。

证明：设环为 $p_1, \dots, p_n$ 若存在 $p_i \rightarrow p_{i+2}$ 显然将 p_{i+1} 删去即可。否则，我们证明将 p_1 删除后，剩下的点仍然强连通 p_2 可以走到所有的点 $p_3 \rightarrow p_4 \rightarrow p_2$ 因此 p_3 也可以走到所有的点。对于 $i \geq 4$ $p_i \rightarrow p_{i-2}$ 因此 p_i 同样可以走到所有的点。由于它强连通，因此存在一个长度为 $n-1$ 的环。

兰道定理

定义一个竞赛图的比分序列 $s_1, \dots, s_n$ 为将图中所有点出度从小到大排序后的序列 s 是一个度数序列当且仅当 $\forall 1 \leq i < n, \sum_{j=1}^i s_j \geq \binom{i}{2}$ $\sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}$

证明：我们从一个基础的竞赛图开始归纳地构造。不妨设已有一个竞赛图 T 其比分序列 t 满足 $\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^i t_j \leq \sum_{j=1}^i s_j$ 注意到 $\forall 1 \leq j < i \leq n, i \rightarrow j$ 永远满足该条件。

设 u 为第一个满足 $t_u < s_u$ 的 u v 为最后一个满足 $t_v = t_u$ 的 v w 为第一个满足 $t_w > s_w$ 的 w 如果不存在的话 $\sum_{i=1}^n s_i > \sum_{i=1}^n t_i$ 矛盾)。如图所示：

```

\begin{matrix}
& s_1 & \cdots & s_{u-1} & s_u & \cdots & s_v & s_{v+1} & \cdots & s_{w-1} & s_w & s_{w+1} & \cdots & s_n \\
& \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel \\
& t_1 & \cdots & t_{u-1} & t_u & \cdots & t_v & t_{v+1} & \cdots & t_{w-1} & t_w & t_{w+1} & \cdots & t_n
\end{matrix}

```

可见 $t_w > s_w \geq s_v > t_v$ 即 $t_w \geq t_v + 2$ $|\text{out}(w)| + |\text{in}(v)| = n - 1 + |\text{out}(w)| - |\text{out}(v)| \geq n + 1$ 考虑到可能存在 $w \rightarrow v$ 从集合中删去 w, v 后，有 $|\text{out}(w)| + |\text{in}(v)| \geq n - 1$ 根据抽屉原理，至少存在一个点 $a \neq w, v$ $w \rightarrow a \rightarrow v$

考虑将 $w \rightarrow a \rightarrow v$ 反转为 $v \rightarrow a \rightarrow w$ 会导致 $t_w = t_w - 1, t_v = t_v + 1$ 注意到 $t_v < t_{v+1} \leq t_{w-1} < t_w$ 因此这不会改变 t 的排序，容易发现它仍然满足 $\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^i t_j \leq \sum_{j=1}^i s_j$ 同时注意到，这会导致 t 的字典序变大，因而该过程不会永远继续下去，最终可以得到 $t = s$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:intrepidword:zhongzihao:tournament_graph

Last update: 2021/04/01 21:50

