

# 普通莫队算法

## 形式

假设  $n=m$  那么对于序列上的区间询问问题，如果从  $[l,r]$  的答案能够  $O(1)$  扩展到  $[l-1,r],[l+1,r],[l,r+1],[l,r-1]$  (即与  $[l,r]$  相邻的区间) 的答案，那么可以在  $O(n\sqrt{n})$  的复杂度内求出所有询问的答案。

## 实现

离线后排序，顺序处理每个询问，暴力从上一个区间的答案转移到下一个区间答案（一步步移动即可）。

## 排序方法

对于区间  $[l,r]$  以  $l$  所在块的编号为第一关键字， $r$  为第二关键字从小到大排序。

## 模板

```
inline void move(int pos, int sign) {
    // update nowAns
}

void solve() {
    BLOCK_SIZE = int(ceil(pow(n, 0.5)));
    sort(queries, queries + m);
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        const query &q = queries[i];
        while (l > q.l) move(--l, 1);
        while (r < q.r) move(r++, 1);
        while (l < q.l) move(l++, -1);
        while (r > q.r) move(--r, -1);
        ans[q.id] = nowAns;
    }
}
```

## 例题 & 代码

例题「国家集训队」小 Z 的袜子

题目大意：

有一个长度为  $n$  的序列  $\{c_i\}$  现在给出  $m$  个询问，每次给出两个数  $l,r$  从编号在  $l$  到  $r$  之间的数中随机选出两个不同的数，求两个数相等的概率。

思路：莫队算法模板题。

对于区间  $[l,r]$  以  $l$  所在块的编号为第一关键字  $r$  为第二关键字从小到大排序。

然后从序列的第一个询问开始计算答案，第一个询问通过直接暴力算出，复杂度为  $O(n)$  后面的询问在前一个询问的基础上得到答案。

具体做法：

对于区间  $[i,i]$  由于区间只有一个元素，我们很容易就能知道答案。然后一步一步从当前区间（已知答案）向下一个区间靠近。

我们设  $col[i]$  表示当前颜色  $i$  出现了多少次  $ans$  表示当前共有多少种可行的配对方案（有多少种可以选到一双颜色相同的袜子），然后每次移动的时候更新答案——设当前颜色为  $k$  如果是增长区间就是  $ans$  加上  $C^2_{col[k]+1}-C^2_{col[k]}$  如果是缩短就是  $ans$  减去  $C^2_{col[k]}-C^2_{col[k]-1}$

而这个询问的答案就是  $\frac{ans}{C^2_{r-l+1}}$

这里有个优化  $C^2_a = \frac{a(a-1)}{2}$

所以  $C^2_{a+1}-C^2_a = \frac{(a+1)a}{2} - \frac{a(a-1)}{2} = a$

所以  $C^2_{col[k]+1}-C^2_{col[k]} = col[k]$

算法总复杂度  $O(n\sqrt{n})$

下面的代码中  $deno$  表示答案的分母(denominator)  $nume$  表示分子(numerator)  $sqn$  表示块的大小  $\sqrt{n}$   $arr$  是输入的数组， $node$  是存储询问的结构体， $tab$  是询问序列（排序后的）， $col$  同上所述。

注意：由于  $++l$  和  $--r$  的存在，下面代码中的移动区间的 4 个 **for** 循环的位置很关键，不能改变它们之间的位置关系。

参考代码：

```
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <cstdio>
using namespace std;
const int N = 50005;
int n, m, maxn;
int c[N];
long long sum;
int cnt[N];
long long ans1[N], ans2[N];
struct query {
    int l, r, id;
    bool operator<(const query &x) const {
        if (l / maxn != x.l / maxn) return l < x.l;
        return (l / maxn) & 1 ? r < x.r : r > x.r;
    }
} a[N];
```

```

void add(int i) {
    sum += cnt[i];
    cnt[i]++;
}
void del(int i) {
    cnt[i]--;
    sum -= cnt[i];
}
long long gcd(long long a, long long b) { return b ? gcd(b, a % b) : a; }
int main() {
    scanf("%d%d", &n, &m);
    maxn = sqrt(n);
    for (int i = 1; i <= n; i++) scanf("%d", &c[i]);
    for (int i = 0; i < m; i++) scanf("%d%d", &a[i].l, &a[i].r), a[i].id = i;
    sort(a, a + m);
    for (int i = 0, l = 1, r = 0; i < m; i++) {
        if (a[i].l == a[i].r) {
            ans1[a[i].id] = 0, ans2[a[i].id] = 1;
            continue;
        }
        while (l < a[i].l) del(c[l++]);
        while (l > a[i].l) add(c[--l]);
        while (r < a[i].r) add(c[++r]);
        while (r > a[i].r) del(c[r--]);
        ans1[a[i].id] = sum;
        ans2[a[i].id] = (long long)(r - l + 1) * (r - l) / 2;
    }
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        if (ans1[i] != 0) {
            long long g = gcd(ans1[i], ans2[i]);
            ans1[i] /= g, ans2[i] /= g;
        } else
            ans2[i] = 1;
        printf("%lld/%lld\n", ans1[i], ans2[i]);
    }
    return 0;
}

```

## 普通莫队的优化

我们看一下下面这组数据

```

// 设块的大小为 2 (假设)
1 1
2 100
3 1
4 100

```

手动模拟一下可以发现  $l$  指针的移动次数大概为 300 次，我们处理完第一个块之后  $l=2, r=100$  此时只

需移动两次 l 指针就可以得到第四个询问的答案，但是我们却将 r 指针移动到 1 来获取第三个询问的答案，再移动到 100 获取第四个询问的答案，这样多了九十多次的指针移动。我们怎么优化这个地方呢？这里我们就要用到奇偶化排序。

什么是奇偶化排序？奇偶化排序即对于属于奇数块的询问 r 按从小到大排序，对于属于偶数块的排序 r 从大到小排序，这样我们的 r 指针在处理完这个奇数块的问题后，将在返回的途中处理偶数块的问题，再向 n 移动处理下一个奇数块的问题，优化了 r 指针的移动次数，一般情况下，这种优化能让程序快 30% 左右。

排序代码：

压行

```
// 这里有个小细节等下会讲
int unit; // 块的大小
struct node {
    int l, r, id;
    bool operator<(const node &x) const {
        return l / unit == x.l / unit
            ? (r == x.r ? 0 : ((l / unit) & 1) ^ (r < x.r))
            : l < x.l;
    }
};
```

不压行

```
struct node {
    int l, r, id;
    bool operator<(const node &x) const {
        if (l / unit != x.l / unit) return l < x.l;
        if ((l / unit) & 1)
            return r <
                x.r; // 注意这里和下面一行不能写小于（大于）等于，否则会出错（详见下面的小
        细节）
        return r > x.r;
    }
};
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string%E5%90%84%E5%AD%A3%E5%BA%A6%E8%AE%AD%E7%BB%83%E8%AE%A1%E5%8B%92%E5%8F%8A%E8%AE%AD%E7%BB%83%E8%AE%B0%E5%BD%95%E6%99%AE%98%9A%E8%AE%AB%E9%98%9F%E7%AE%97%E6%B3%95\\_lgwza&rev=1596468253](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string%E5%90%84%E5%AD%A3%E5%BA%A6%E8%AE%AD%E7%BB%83%E8%AE%A1%E5%8B%92%E5%8F%8A%E8%AE%AD%E7%BB%83%E8%AE%B0%E5%BD%95%E6%99%AE%98%9A%E8%AE%AB%E9%98%9F%E7%AE%97%E6%B3%95_lgwza&rev=1596468253)

Last update: 2020/08/03 23:24