后缀数组(SA)

一些约定

字符串相关的定义请参考字符串基础

字符串下标从 1 开始。

“ 后缀 i”代指以第 i 个字符开头的后缀。

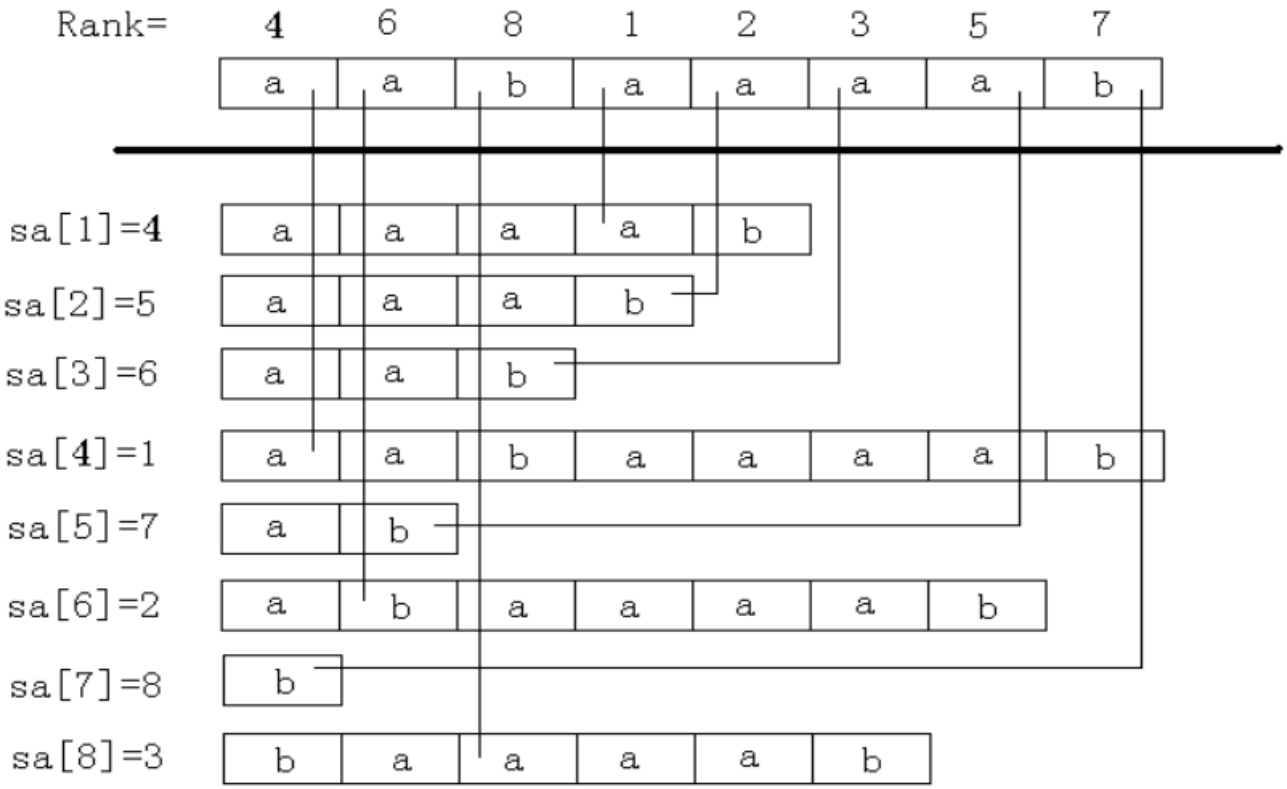
后缀数组是什么？

后缀数组(Suffix Array)主要是两个数组□sa 和 rk□

其中□$sa[i]$ 表示将所有后缀排序后第 i 小的后缀的编号□$rk[i]$ 表示后缀 i 的排名。

这两个数组满足性质□$sa[rk[i]]=rk[sa[i]]=i$□

后缀数组示例：



后缀数组怎么求？

$O(n^2\log n)$ 做法

我相信这个做法大家还是能自己想到的，用 `string` + `sort` 就可以了。由于比较两个字符串是 $O(n)$ 的，所以排序是 $O(n^2\log n)$ 的。

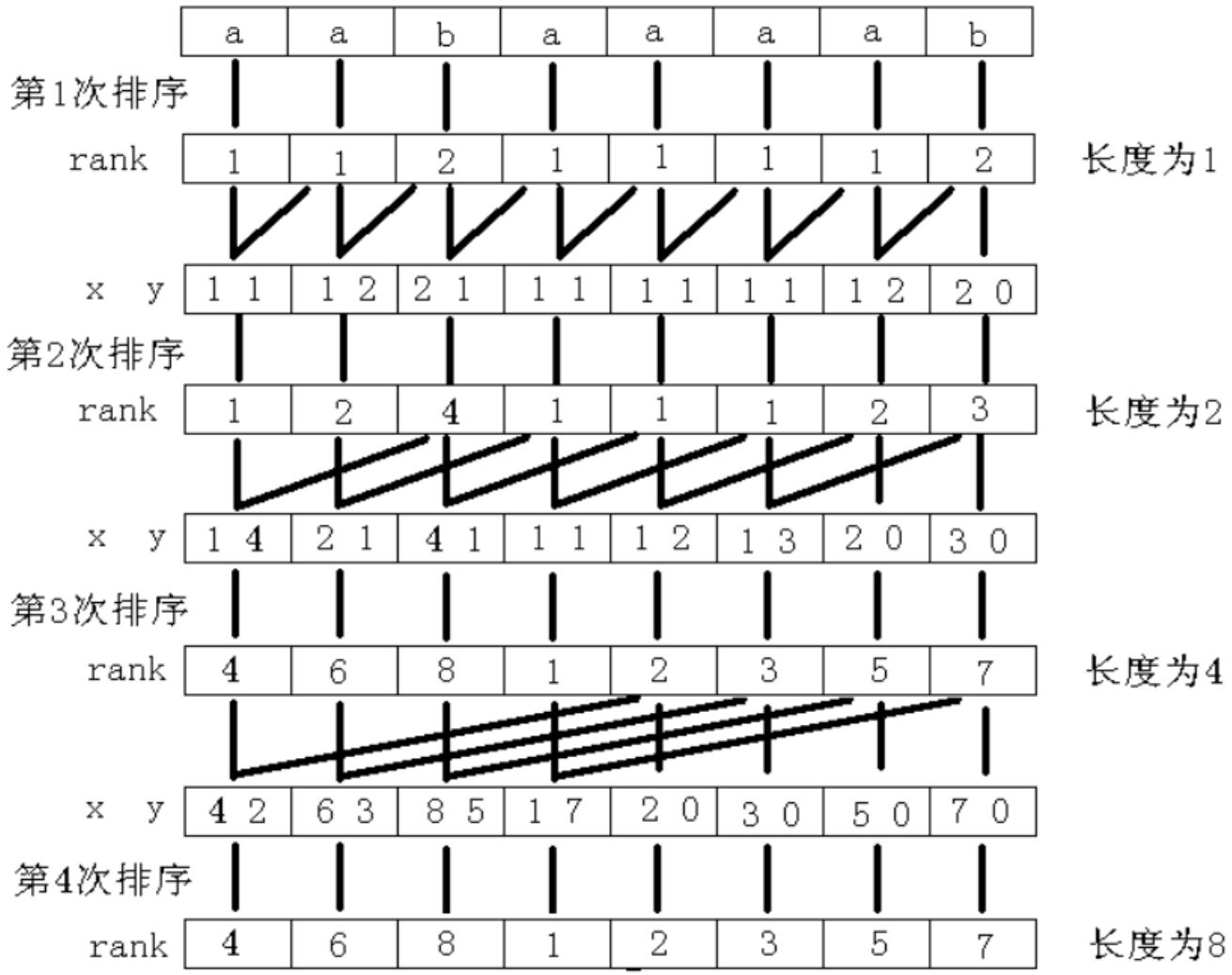
$O(n\log^2n)$ 做法

这个做法要用到倍增的思想。

先对每个长度为 1 的子串（即每个字符）进行排序。

假设我们已经知道了长度为 w 的子串的排名 $rk_w[1..n]$ ，即，$rk_w[i]$ 表示 $s[i..\min(i+w-1,n)]$ 在 $\{s[x..\min(x+w-1,n)]|x\in[1,n]\}$ 中的排名），那么，以 $rk_w[i]$ 为第一关键字，$rk_w[i+w]$ 为第二关键字（若 $i+w>n$ 则令 $rk_w[i+w]$ 为无穷小）进行排序，就可以求出 $rk_{2w}[1..n]$ 。

倍增排序示意图：



如果用 `sort` 进行排序，复杂度就是 $O(n\log^2n)$的。

参考代码：

```cpp
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1000010;

char s[N];
int n, w, sa[N], rk[N << 1], oldrk[N << 1];
//为了防止访问 rk[i+w] 导致数组越界，开两倍数组。
//当然也可以在访问前判断是否越界，但直接开两倍数组方便一些。

int main() {
  int i, p;

  scanf("%s", s + 1);
  n = strlen(s + 1);
  for (i = 1; i <= n; ++i) sa[i] = i, rk[i] = s[i];

  for (w = 1; w < n; w <<= 1) {
    sort(sa + 1, sa + n + 1, [](int x, int y) {
      return rk[x] == rk[y] ? rk[x + w] < rk[y + w] : rk[x] < rk[y];
    });  //这里用到了 lambda
    memcpy(oldrk, rk, sizeof(rk));
    //由于计算 rk 的时候原来的 rk 会被覆盖，要先复制一份
    for (p = 0, i = 1; i <= n; ++i) {
      if (oldrk[sa[i]] == oldrk[sa[i - 1]] &&
          oldrk[sa[i] + w] == oldrk[sa[i - 1] + w]) {
        rk[sa[i]] = p;
      } else {
        rk[sa[i]] = ++p;
      }  //若两个子串相同，它们对应的 rk 也需要相同，所以要去重
    }
  }

  for (i = 1; i <= n; ++i) printf("%d ", sa[i]);

  return 0;
}
```

$O(n\log n)$ 做法

在刚刚的 $O(n\log^2n)$ 做法中，单次排序是 $O(n\log n)$ 的，如果能 $O(n)$ 排序，就能在 $O(n\log n)$ 计算后缀数组了。

前置知识：==计数排序==，==基数排序==。

由于计算后缀数组的过程中排序的关键字是排名，值域为 $O(n)$□并且是一个双关键字的排序，可以使用

基数排序优化至 $O(n)$

参考代码：

```
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1000010;

char s[N];
int n, sa[N], rk[N << 1], oldrk[N << 1], id[N], cnt[N];

int main() {
  int i, m, p, w;

  scanf("%s", s + 1);
  n = strlen(s + 1);
  m = max(n, 300);
  for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[i] = s[i]];
  for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
  for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[i]]--] = i;

  for (w = 1; w < n; w <<= 1) {
    memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
    for (i = 1; i <= n; ++i) id[i] = sa[i];
    for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[id[i] + w]];
    for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
    for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[id[i] + w]]--] = id[i];
    memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
    for (i = 1; i <= n; ++i) id[i] = sa[i];
    for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[id[i]]];
    for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
    for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[id[i]]]--] = id[i];
    memcpy(oldrk, rk, sizeof(rk));
    for (p = 0, i = 1; i <= n; ++i) {
      if (oldrk[sa[i]] == oldrk[sa[i - 1]] &&
          oldrk[sa[i] + w] == oldrk[sa[i - 1] + w]) {
        rk[sa[i]] = p;
      } else {
        rk[sa[i]] = ++p;
      }
    }
  }

  for (i = 1; i <= n; ++i) printf("%d ", sa[i]);
```

```
    return 0;
}
```

一些常数优化

如果你把上面那份代码交到 LOJ #111: 后缀排序 上：

测试点 #1	Accepted	得分：100	用时：20 ms	内存：11900 KiB
测试点 #2	Accepted	得分：100	用时：27 ms	内存：12004 KiB
测试点 #3	Accepted	得分：100	用时：27 ms	内存：11900 KiB
测试点 #4	Accepted	得分：100	用时：37 ms	内存：12112 KiB
测试点 #5	Accepted	得分：100	用时：36 ms	内存：12112 KiB
测试点 #6	Accepted	得分：100	用时：103 ms	内存：13200 KiB
测试点 #7	Accepted	得分：100	用时：111 ms	内存：13248 KiB
测试点 #8	Time Limit Exceeded	得分：0	用时：4018 ms	内存：24576 KiB
测试点 #9	Time Limit Exceeded	得分：0	用时：4014 ms	内存：24576 KiB
测试点 #10	Time Limit Exceeded	得分：0	用时：4018 ms	内存：24576 KiB

这是因为，上面那份代码的常数的确很大。