

后缀数组(SA)

一些约定

字符串相关的定义请参考字符串基础

字符串下标从 1 开始。

“后缀 i ”代指以第 i 个字符开头的后缀。

后缀数组是什么？

后缀数组(Suffix Array)主要是两个数组 sa 和 rk

其中 $sa[i]$ 表示将所有后缀排序后第 i 小的后缀的编号 $rk[i]$ 表示后缀 i 的排名。

这两个数组满足性质 $sa[rk[i]] = rk[sa[i]] = i$

后缀数组示例：



后缀数组怎么求？

$O(n^2 \log n)$ 做法

我相信这个做法大家还是能自己想到的，用 `string + sort` 就可以了。由于比较两个字符串是 $O(n)$ 的，所以排序是 $O(n^2 \log n)$ 的。

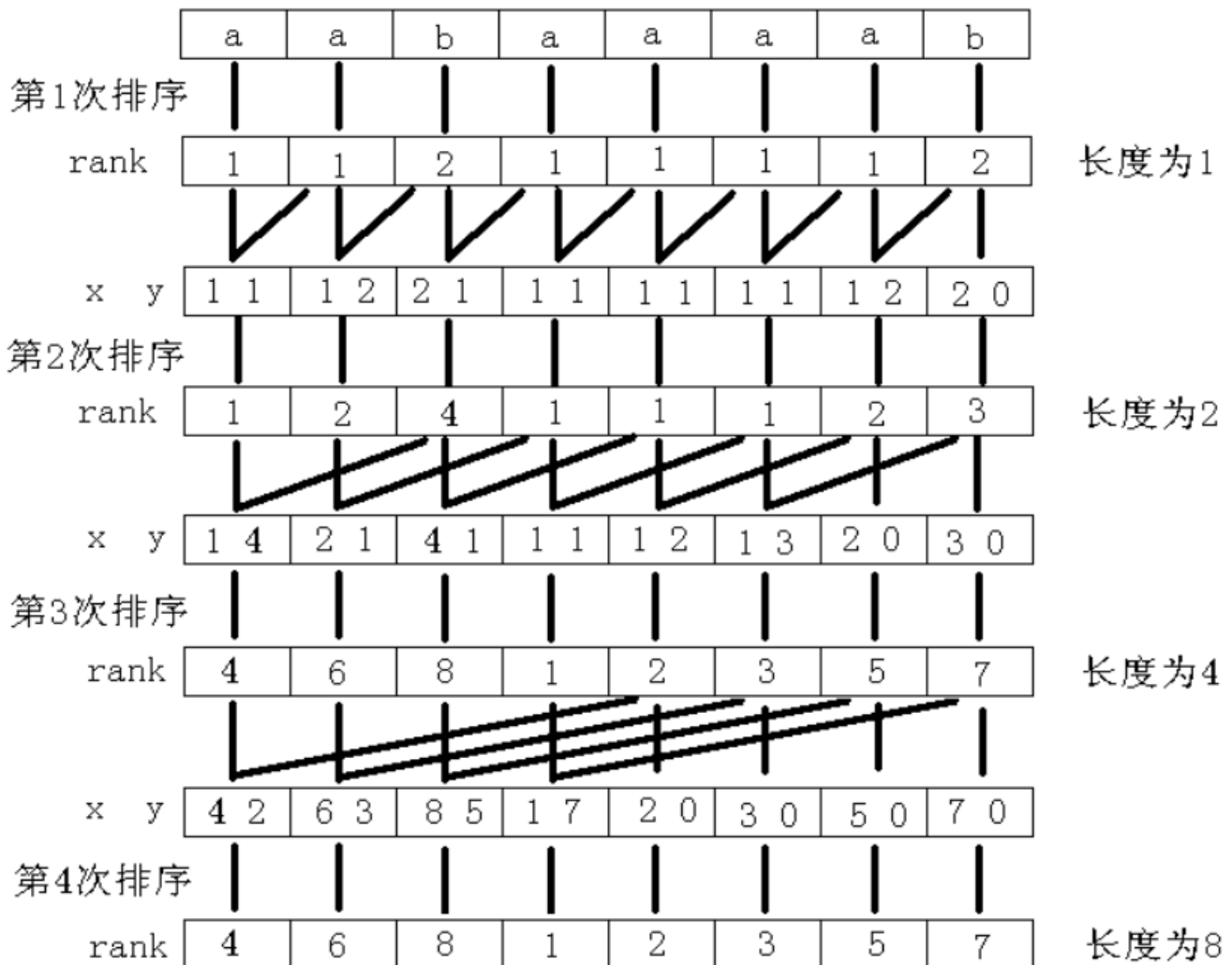
$O(n \log^2 n)$ 做法

这个做法要用到倍增的思想。

先对每个长度为 1 的子串（即每个字符）进行排序。

假设我们已经知道了长度为 w 的子串的排名 $rk_w[1..n]$ （即， $rk_w[i]$ 表示 $s[i..i+w-1]$ 在 $\{s[x..x+w-1] | x \in [1, n]\}$ 中的排名），那么，以 $rk_w[i]$ 为第一关键字、 $rk_w[i+w]$ 为第二关键字（若 $i+w > n$ 则令 $rk_w[i+w]$ 为无穷小）进行排序，就可以求出 $rk_{2w}[1..n]$ 。

倍增排序示意图：



如果用 `sort` 进行排序，复杂度就是 $O(n \log^2 n)$ 的。

参考代码：

```

#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1000010;

char s[N];
int n, w, sa[N], rk[N << 1], oldrk[N << 1];
// 为了防止访问 rk[i+w] 导致数组越界，开两倍数组。
// 当然也可以在访问前判断是否越界，但直接开两倍数组方便一些。

int main() {
    int i, p;

    scanf("%s", s + 1);
    n = strlen(s + 1);
    for (i = 1; i <= n; ++i) sa[i] = i, rk[i] = s[i];

    for (w = 1; w < n; w <= 1) {
        sort(sa + 1, sa + n + 1, [](int x, int y) {
            return rk[x] == rk[y] ? rk[x + w] < rk[y + w] : rk[x] < rk[y];
        }); // 这里用到了 lambda
        memcpy(oldrk, rk, sizeof(rk));
        // 由于计算 rk 的时候原来的 rk 会被覆盖，要先复制一份
        for (p = 0, i = 1; i <= n; ++i) {
            if (oldrk[sa[i]] == oldrk[sa[i - 1]] &&
                oldrk[sa[i] + w] == oldrk[sa[i - 1] + w]) {
                rk[sa[i]] = p;
            } else {
                rk[sa[i]] = ++p;
            } // 若两个子串相同，它们对应的 rk 也需要相同，所以要去重
        }
    }

    for (i = 1; i <= n; ++i) printf("%d ", sa[i]);

    return 0;
}

```

$O(n \log n)$ 做法

在刚刚的 $O(n \log^2 n)$ 做法中，单次排序是 $O(n \log n)$ 的，如果能 $O(n)$ 排序，就能在 $O(n \log n)$ 计算后缀数组了。

前置知识：计数排序，基数排序。

由于计算后缀数组的过程中排序的关键字是排名，值域为 $O(n)$ 并且是一个双关键字的排序，可以使用基数排序优化至 $O(n)$

参考代码：

```
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1000010;

char s[N];
int n, sa[N], rk[N << 1], oldrk[N << 1], id[N], cnt[N];

int main() {
    int i, m, p, w;

    scanf("%s", s + 1);
    n = strlen(s + 1);
    m = max(n, 300);
    for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[i] = s[i]];
    for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
    for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[i]] - 1] = i;

    for (w = 1; w < n; w <= 1) {
        memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
        for (i = 1; i <= n; ++i) id[i] = sa[i];
        for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[id[i] + w]];
        for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
        for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[id[i] + w]] - 1] = id[i];
        memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
        for (i = 1; i <= n; ++i) id[i] = sa[i];
        for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[id[i]]];
        for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
        for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[id[i]]] - 1] = id[i];
        memcpy(olldrk, rk, sizeof(rk));
        for (p = 0, i = 1; i <= n; ++i) {
            if (olldrk[sa[i]] == oldrk[sa[i - 1]] &&
                oldrk[sa[i] + w] == oldrk[sa[i - 1] + w]) {
                rk[sa[i]] = p;
            } else {
                rk[sa[i]] = ++p;
            }
        }
    }
}
```

```

for (i = 1; i <= n; ++i) printf("%d ", sa[i]);

return 0;
}

```

一些常数优化

如果你把上面那份代码交到 [LOJ #111: 后缀排序](#) 上：

▶ 测试点 #1	✓ Accepted	得分: 100	用时: 20 ms	内存: 11900 KIB
▶ 测试点 #2	✓ Accepted	得分: 100	用时: 27 ms	内存: 12004 KIB
▶ 测试点 #3	✓ Accepted	得分: 100	用时: 27 ms	内存: 11900 KIB
▶ 测试点 #4	✓ Accepted	得分: 100	用时: 37 ms	内存: 12112 KIB
▶ 测试点 #5	✓ Accepted	得分: 100	用时: 36 ms	内存: 12112 KIB
▶ 测试点 #6	✓ Accepted	得分: 100	用时: 103 ms	内存: 13200 KIB
▶ 测试点 #7	✓ Accepted	得分: 100	用时: 111 ms	内存: 13248 KIB
▶ 测试点 #8	⚠ Time Limit Exceeded	得分: 0	用时: 4018 ms	内存: 24576 KIB
▶ 测试点 #9	⚠ Time Limit Exceeded	得分: 0	用时: 4014 ms	内存: 24576 KIB
▶ 测试点 #10	⚠ Time Limit Exceeded	得分: 0	用时: 4018 ms	内存: 24576 KIB

这是因为，上面那份代码的常数的确很大。

第二关键字无需计数排序

实际上，像这样就可以了：

```

for (p = 0, i = n; i > n - w; --i) id[++p] = i;
for (i = 1; i <= n; ++i) {
    if (sa[i] > w) id[++p] = sa[i] - w;
}

```

意会一下，先把 $s[i+w..i+2w-1]$ 为空串（即第二关键字为无穷小）的位置放前面，再把剩下的按排好的顺序放进去。

优化计数排序的值域

每次对 rk 进行去重之后，我们都计算了一个 sp 这个 sp 即是 rk 的值域，将值域改成它即可。

将 $rk[id[i]]$ 存下来，减少不连续内存访问

这个在数据范围较大时效果非常明显。

用函数 cmp 来计算是否重复

同样是减少不连续内存访问，在数据范围较大时效果比较明显。

把 `oldrk[sa[i]] == oldrk[sa[i - 1]] && oldrk[sa[i] + w] == oldrk[sa[i - 1] + w]` 替换成 `cmp(sa[i], sa[i - 1], w)`

```
bool cmp(int x, int y, int w) { return oldrk[x] == oldrk[y] && oldrk[x + w] == oldrk[y + w]; }
```

参考代码：

```
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1000010;

char s[N];
int n, sa[N], rk[N], oldrk[N << 1], id[N], px[N], cnt[N];
// px[i] = rk[id[i]] 用于排序的数组所以叫 px

bool cmp(int x, int y, int w) {
    return oldrk[x] == oldrk[y] && oldrk[x + w] == oldrk[y + w];
}

int main() {
    int i, m = 300, p, w;

    scanf("%s", s + 1);
    n = strlen(s + 1);
    for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[i] = s[i]];
    for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
    for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[i]] - 1] = i;

    for (w = 1; w < n; w <= 1, m = p) { // m=p 就是优化计数排序值域
        for (p = 0, i = n; i > n - w; --i) id[++p] = i;
        for (i = 1; i <= n; ++i)
            if (sa[i] > w) id[++p] = sa[i] - w;
        memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
        for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[px[i] = rk[id[i]]];
        for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
        for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[px[i]] - 1] = id[i];
        memcpy(oldrk, rk, sizeof(rk));
        for (p = 0, i = 1; i <= n; ++i)
            rk[sa[i]] = cmp(sa[i], sa[i - 1], w) ? p : ++p;
    }

    for (i = 1; i <= n; ++i) printf("%d ", sa[i]);
}
```

```
return 0;
}
```

$O(n)$ 做法

在一般的题目中，常数较小的倍增求后缀数组是完全够用的，求后缀数组以外的部分也经常有 $O(n \log n)$ 的复杂度，倍增求解后缀数组不会成为瓶颈。

但如果遇到特殊题目、时限较紧的题目，或者是你想追求更短的用时，就需要学习 $O(n)$ 求后缀数组的方法。

SA-IS

可以参考 [诱导排序与 SA-IS 算法](#) □

DC3

可以参考 [2009 后缀数组——处理字符串的有力工具](#) by. 罗穗骞 □

后缀数组的应用

寻找最小的循环移动位置

将字符串 SS 复制一份变成 SSS 就转化成了后缀排序问题。

例题：□[JSOI2007](#)□[字符加密](#) □

在字符串中找子串

任务是在线地在主串 T 中寻找模式串 S □在线的意思是，我们已经预先知道主串 T □但是当且仅当询问时才知道模式串 S □我们可以先构造出 T 的后缀数组，然后查找子串 S □若子串 S 在 T 中出现，它必定是 T 的一些后缀的前缀。因为我们已经将所有后缀排序了，我们可以通过在 sa 数组中二分查找来实现。比较子串 S 和当前后缀的时间复杂度为 $O(|S|)$ □因此找子串的时间复杂度为 $O(|S| \log |T|)$ □注意，如果该子串在 T 中出现了多次，每次出现都是在 sa 数组中相邻的。因此出现次数可以通过再次二分找到，输出每次出现的位置也很轻松。

从字符串首尾取字符最小化字典序

例题：□[USACO07DEC](#)□[Best Cow Line](#) □

题意：给你一个字符串，每次从首或尾取一个字符组成字符串，问所有能够组成的字符串中最小的一个。

题解：暴力做法就是每次最坏 $O(n)$ 地判断当前应该取首还是尾（即比较取首得到的字符串与取尾得到的反串的大小），只需优化这一判断过程即可。

由于需要在原串后缀与反串后缀构成的集合内比较大小，可以将反串拼接在原串后，并在中间加上一个没出现过的字符（如 #，代码中可以直接使用空字符），求后缀数组，即可 $O(1)$ 完成这一判断。

参考代码：

```
#include <cctype>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1000010;

char s[N];
int n, sa[N], id[N], oldrk[N << 1], rk[N << 1], px[N], cnt[N];

bool cmp(int x, int y, int w) {
    return oldrk[x] == oldrk[y] && oldrk[x + w] == oldrk[y + w];
}

int main() {
    int i, w, m = 200, p, l = 1, r, tot = 0;

    cin >> n;
    r = n;

    for (i = 1; i <= n; ++i)
        while (!isalpha(s[i] = getchar()))
            ;
    for (i = 1; i <= n; ++i) rk[i] = rk[2 * n + 2 - i] = s[i];

    n = 2 * n + 1;

    for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[rk[i]];
    for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
    for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[rk[i]]--] = i;

    for (w = 1; w < n; w <= 1, m = p) {
        for (p = 0, i = n; i > n - w; --i) id[++p] = i;
        for (i = 1; i <= n; ++i)
            if (sa[i] > w) id[++p] = sa[i] - w;
        memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
        for (i = 1; i <= n; ++i) ++cnt[px[i] = rk[id[i]]];
        for (i = 1; i <= m; ++i) cnt[i] += cnt[i - 1];
        for (i = n; i >= 1; --i) sa[cnt[px[i]]--] = id[i];
    }
}
```

```

memcpy(olldrk, rk, sizeof(rk));
for (p = 0, i = 1; i <= n; ++i)
    rk[sa[i]] = cmp(sa[i], sa[i - 1], w) ? p : ++p;
}

while (l <= r) {
    printf("%c", rk[l] < rk[n + 1 - r] ? s[l++] : s[r--]);
    if ((++tot) % 80 == 0) puts("");
}

return 0;
}

```

height 数组

LCP (最长公共前缀)

两个字符串 S 和 T 的 LCP 就是最大的 x ($x \leq \min(|S|, |T|)$) 使得 $S_i = T_i$ ($\forall 1 \leq i \leq x$)

下文中以 $lcp(i, j)$ 表示后缀 i 和后缀 j 的最长公共前缀 (的长度)。

height 数组的定义

$height[i] = lcp(sa[i], sa[i-1])$ 即第 i 名的后缀与它前一名后缀的最长公共前缀。

$height[1]$ 可以视作 0 。

$O(n)$ 求 height 数组需要一个引理

$height[rk[i]] \geq height[rk[i-1]] - 1$

证明：

略

$O(n)$ 求 height 数组的代码实现

利用上面这个引理暴力求即可：

```

for (i = 1, k = 0; i <= n; ++i) {
    if (k) --k;
    while (s[i + k] == s[sa[rk[i] - 1] + k]) ++k;
    ht[rk[i]] = k; // height 太长了缩写为 ht
}

```

k 不会超过 n 最多减 n 次，所以最多加 $2n$ 次，总复杂度就是 $O(n)$

未完待续

参考链接

[参考链接](#)

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E5%90%8E%E7%BC%80%E6%95%B0%E7%BB%84_lgwza&rev=1595578623

Last update: 2020/07/24 16:17