

数论概论学习小结 by Igwza

第5章 整除性与最大公因数

定理 5.1 (欧几里得算法)

要计算两个整数 a 与 b 的最大公因数，先令 $r_{-1}=a$ 且 $r_0=b$ 然后计算相继的商和余数 $r_{i-1}=q_{i+1} \times r_i + r_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) 直到某余数 r_{n+1} 为 0。最后的非零余数 r_n 就是 a 与 b 的最大公因数。

第6章 线性方程与最大公因数

定理 6.1 (线性方程定理)

设 a 与 b 是非零整数 $g = \gcd(a, b)$ 。方程 $ax + by = g$ 总是有一个整数解 (x_1, y_1) 它可由前面叙述的欧几里得算法得到。则方程的每一个解可由 $(x_1 + k \cdot \frac{b}{g}, y_1 - k \cdot \frac{a}{g})$ 得到，其中 k 可为任意整数。

第7章 因数分解与算术基本定理

断言 7.1

令 p 是素数，假设 p 整除乘积 ab ，则 p 整除 a 或 p 整除 b (或者 p 既整除 a 也整除 b)

定理 7.2 (素数整除性质)

假设素数 p 整除乘积 $a_1 a_2 \dots a_r$ ，则 p 整除 a_1, a_2, \dots, a_r 中至少一个因数

定理 7.3 (算术基本定理)

每个整数 $n \geq 2$ 可唯一分解成素数乘积 $n = p_1 p_2 \dots p_r$

第8章 同余式

如果 m 整除 $a-b$ ，我们就说 a 与 b 模 m 同余并记之为 $a \equiv b \pmod{m}$ 数 m 叫做同余式的模。具有相同模的同余式在许多方面表现得很像通常的等式。如果 $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$ 则 $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 \pmod{m}$, $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$ 提醒：用数除同余式并非总是可能的。换句话说，如果 $a \equiv b \pmod{m}$

$a \not\equiv b \pmod{m}$, 则 $a \equiv b \pmod{m}$ 未必成立. 然而, 如果 $\gcd(c, m) = 1$, 则可从同余式 $ac \equiv bc \pmod{m}$ 两边消去 c .

定理 8.1 (线性同余式定理)

设 a, c 与 m 是整数, $m \geq 1$, 且设 $g = \gcd(a, m)$. (a) 如果 $g \nmid c$, 则同余式 $ax \equiv c \pmod{m}$ 没有解 (b) 如果 $g \mid c$, 则同余式 $ax \equiv c \pmod{m}$ 恰好有 g 个不同的解. 要求这些解, 首先求线性方程 $au + mv = g$ 的一个解 (u_0, v_0) (第6章叙述了解这个方程的方法). 则 $x_0 = cu_0/g$ 是 $ax \equiv c \pmod{m}$ 的解, 不同余解的完全集由 $x \equiv x_0 + k \cdot \frac{g}{m}$, $k = 0, 1, 2, \dots, g-1$ 给出.

第9章 同余式、幂与费马小定理

定理 9.1 (费马小定理)

设 p 是素数, a 是任意整数且 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

断言 9.2

设 p 是素数, a 是任何整数且 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, 则数 $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a \pmod{p}$ 与数 $1, 2, 3, \dots, (p-1) \pmod{p}$ 相同, 尽管它们的次序不同.

第 10 章 同余式、幂与欧拉公式

在 0 与 m 之间且与 m 互素的整数个数是个重要的量, 我们赋予这个量一个名称: $\phi(m) = \#\{a: 1 \leq a \leq m, \gcd(a, m) = 1\}$. 函数 ϕ 叫做欧拉函数.

定理 10.1 (欧拉公式)

如果 $\gcd(a, m) = 1$, 则 $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

断言 10.2

如果 $\gcd(a, m) = 1$, 则数列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{\phi(m)} a \pmod{m}$ 与数列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{\phi(m)} \pmod{m}$ 相同, 尽管它们可能次序不同

第 11 章 欧拉 ϕ 函数与中国剩余定理

定理 11.1 (ϕ 函数公式)

- 如果 p 是素数且 $k \geq 1$, 则 $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
- 如果 $\gcd(m, n) = 1$, 则 $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

定理 11.2 (中国剩余定理)

设 m 与 n 是整数, $\gcd(m, n) = 1$, b 与 c 是任意整数. 则同余式组 $x \equiv b \pmod{m}$ 与 $x \equiv c \pmod{n}$ 恰有一个解 $0 \leq x \leq mn$.

第 12 章 素数

定理 12.1 (无穷多素数定理)

存在无穷多个素数.

定理 12.2 (模 4 余 3 的素数定理)

存在无穷多个模 4 余 3 的素数.

定理 12.3 (算术级数的素数狄利克雷定理)

设 a 与 m 是整数, $\gcd(a, m) = 1$. 则存在无穷多个素数模 m 余 a , 则存在无穷多个素数 p 满足 $p \equiv a \pmod{m}$

第 13 章 素数计数

$\pi(x) = \#\{ \text{素数 } p \mid p \leq x \}$.

定理 13.1 (素数定理)

当 x 很大时, 小于 x 的素数个数近似等于 $x/\ln(x)$. 换句话说, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$

第 14 章 梅森素数

命题 14.1

如果对整数 $a \geq 2$ 与 $n \geq 2$, a^{n-1} 是素数, 则 a 必等于 2 且 n 一定是素数

形如 2^{p-1} 的素数叫做梅森素数

第 15 章 梅森素数与完全数

完全数是等于其真因数之和的数

定理 15.1 (欧几里得完全数公式)

如果 2^{p-1} 是素数, 则 $2^{p-1}(2^p-1)$ 是完全数

定理 15.2 (欧拉完全数定理)

如果 n 是完全数, 则 n 是 $n=2^{p-1}(2^p-1)$ 形式, 其中 2^{p-1} 是梅森素数

$\sigma(n)=n$ 的所有因数之和(包括 1 与 n). σ

定理 15.3 (σ 函数公式)

1. 如果 p 是素数, $k \geq 1$, 则 $\sigma(p^k)=1+p+p^2+\dots+p^k=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}$
2. 如果 $\gcd(m, n)=1$, 则 $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$.

第 16 章 幂模 m 与逐次平方法

算法 16.1 (逐次平方计算 $a^k \pmod{m}$)

用下述步骤计算 $a^k \pmod{m}$ 的值:

1. 将 k 表成 2^r 的幂次和:

$k=u_0+u_1\cdot 2+u_2\cdot 2^2+u_3\cdot 2^3+\dots+u_r\cdot 2^r$

其中每个 u_i 是 0 或 1. (这种表示式叫做 k 的二进制展开.)

2. 使用逐次平方法制作模 m 的 a 的幂次表.

```

$$a^1 \equiv A_0 \pmod{m}$$

$$a^2 \equiv (a^1)^2 \equiv A_0^2 \pmod{m}$$

$$a^4 \equiv (a^2)^2 \equiv A_0^4 \pmod{m}$$

$$a^8 \equiv (a^4)^2 \equiv A_0^8 \pmod{m}$$

$$\vdots$$

$$a^{2r} \equiv (a^{2r-1})^2 \equiv A_{r-1}^2 \pmod{m}$$

```

注意要计算表的每一行, 仅需要取前一行最末的数, 平方它然后用模 m 简化. 也注意到表有 $r+1$ 行, 其中 r 是第 k 步中 k 的二进制展开式中 2^r 的最高指数.

3. 乘积

$\$ A_0^{u_0} \cdot A_1^{u_1} \cdot A_2^{u_2} \cdots A_r^{u_r} \pmod{m}$

同余于 $a^k \pmod{m}$. 注意到所有 u_i 是 0 或 1, 因此这个数实际上是 u_i 等于 1 的那些 A_i

的乘积.

第 17 章 计算模 m 的 k 次根

算法 17.1 (计算模 m 的 k 次根原理)

设 b, k, m , 是已知整数, 满足 $\gcd(b, m) = 1$ 与 $\gcd(k, \phi(m)) = 1$. 下述步骤给出同余式 $x^k \equiv b \pmod{m}$ 的解.

1. 计算 $\phi(m)$. (见第 11 章.)
2. 求满足 $ku \equiv 1 \pmod{\phi(m)}$ 的正整数 u 与 v . (见第 6 章, 另一种叙述方法是 u 是为满足 $ku \equiv 1 \pmod{\phi(m)}$ 的正整数, 所以 u 实际上是 $k \pmod{\phi(m)}$ 的逆)
3. 用逐次平方法计算 $b^u \pmod{m}$. (见第 16 章.) 所得值给出解 x .

第 19 章 素性测试与卡米歇尔数

卡米歇尔数是这样的合数 n , 即对每个整数 $1 \leq a \leq n$, 都有 $a^n \equiv a \pmod{n}$ 换句话说, 卡米歇尔数是可冒充素数的一种合数, 因为它没有合数特征的证据.

1. 每个卡米歇尔数是奇数.
2. 每个卡米歇尔数是不同素数的乘积.

定理 19.1 (卡米歇尔数的考塞特判别法)

设 n 是合数. 则 n 是卡米歇尔数当且仅当它是奇数, 且整除 n 的每个素数 p 满足下述两个条件:

1. p^2 不整除 n .
2. $p-1$ 整除 $n-1$.

定理 19.2 (素数的一个性质)

设 p 是奇素数, 记 $p-1=2^kq$, q 是奇数. 设 a 是不被 p 整除的任何数, 则下述两个条件之一成立:

1. $a^q \pmod{p}$ 余 1
2. 数 $a^q, a^{2q}, a^{2^2q}, \dots, a^{2^{k-1}q}$ 之一模 p 余 -1

定理 19.3 (合数的拉宾-米勒测试)

设 n 是奇素数, 记 $n-1=2^kq$, q 是奇数. 对不被 n 整除的某个 a , 如果下述两个条件都成立, 则 n 是合数.

1. $a^q \equiv 1 \pmod{n}$,
2. 对所有 $i=0,1,2,\dots,k-1, a^{2iq} \equiv 1 \pmod{n}$

如果 n 是奇合数, 则 1 与 $n-1$ 之间至少有 75% 的数可作为 n 的拉宾-米勒证据.

换句话说, 每个合数有许多拉宾-米勒证据来说明它的合数性, 所以, 不存在拉宾-米勒测试的任何“卡米歇尔型数”.

第 20 章 欧拉\phi 函数与因数和

对任意整数 n , 定义函数 $F(n)$: $F(n)=\phi(d_1)+\phi(d_2)+\dots+\phi(d_r)$, 其中 d_1, d_2, \dots, d_r 是 n 的因数.

断言 20.1

如果 $\gcd(m,n)=1$, 则 $F(mn)=F(m)F(n)$

定理 20.2 (欧拉 \phi 函数求和公式)

设 d_1, d_2, \dots, d_r 是 n 的因数, 则 $\phi(d_1)+\phi(d_2)+\dots+\phi(d_r)=n \cdot (\sum_{d|n} \phi(d))$

第 21 章 幂模 p 与原根

如果 a 与 p 互素, 费马小定理(第 9 章)告诉我们 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. a 模 p 的次数(或阶)指 $e_p(a)=(\text{使得 } a^e \equiv 1 \pmod{p} \text{ 的最小指数 } e \geq 1)$ (注意仅允许 a 与 p 互素.)

定理 21.1 (次数整除性质)

设 a 是不被素数 p 整除的整数, 假设 $a^n \equiv 1 \pmod{p}$, 则次数 $e_p(a)$ 整除 n . 特别地, 次数 $e_p(a)$ 总整除 $p-1$.

具有最高次数 $e_p(a)=p-1$ 的数称为模 p 的原根.

定理 21.2 (原根定理)

每个素数 p 都有原根. 更精确地, 有恰好 $\phi(p-1)$ 个模 p 的原根..

第 22 章 原根与指标

模素数 p 的原根 g 的优美体现在每个模 p 的非零数以 g 的幂次出现. 所以, 对任何 $1 \leq a < p$, 我们可选择幂 $g, g^2, g^3, g^4, \dots, g^{p-3}, g^{p-2}, g^{p-1}$ 中恰好一个与 a 模 p 同余. 相应的指数被称为以 g 为底的 a 模 p 的指标. 假设 p 与 g 已给出, 则记指标为 $I(a)$.

定理 22.1 (指标法则)

指标满足下述法则:

1. $I(ab) \equiv I(a) + I(b) \pmod{p-1}$ [乘积法则]
2. $I(a^k) \equiv kI(a) \pmod{p-1}$ [幂法则]

因为恰好与对数满足的法则 $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ 与 $\log(a^k) = k\log(a)$ 相同. 由此, 指标也被称为离散对数

第 23 章 模 p 平方剩余

与一个平方数模 p 同余的非零数称为模 p 的二次剩余. 不与任何一个平方数模 p 同余的数称为模 p 的(二次)非剩余. 我们将二次剩余简记为 QR , 而二次非剩余简记为 NR . 与 0 模 p 同余的数既不是二次剩余, 也不是二次非剩余.

定理 23.1

设 p 为一个奇素数, 则恰有 $\frac{p-1}{2}$ 个模 p 的二次剩余, 且恰有 $\frac{p-1}{2}$ 个模 p 的二次非剩余.

定理 23.2 (二次剩余乘法法则——版本 1)

设 p 为奇素数, 则

1. 两个模 p 的二次剩余的积是二次剩余.
2. 二次剩余与二次非剩余的积是二次非剩余.
3. 两个二次非剩余的积是二次剩余.

这三条法则可用符号表示如下: $QR \times QR = QR$, $QR \times NR = NR$, $NR \times NR = QR$. $\$$

a 模 p 的勒让德符号是 $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{若 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余,} \\ -1 & \text{若 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余.} \end{cases}$ $\$$

定理 23.3 (二次剩余的乘法法则——版本 2)

设 p 为奇素数, 则 $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$

第 24 章 -1 是模 p 平方剩余吗? 2 呢

定理 24.1 (欧拉准则)

设 p 为奇素数, 则 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$

定理 24.2 (二次互反律——第 I 部分)

设 p 为奇素数, 则 -1 是模 p 的二次剩余, 若 $p \equiv 1 \pmod{4}$, -1 是模 p 的二次非剩余, 若 $p \equiv 3 \pmod{4}$. 换句话说, 用勒让德符号可以表示为 $\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{若 } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{若 } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$

定理 24.3 (模 4 余 1 素数定理)

存在无穷多个素数与 $1 \pmod{4}$ 同余

定理 24.4 (二次互反律——第 II 部分)

设 p 为奇素数, 则当 $p \pmod{8}$ 余 1 或 7 时, 2 是模 p 的二次剩余; 当 $p \pmod{8}$ 余 3 或 5 时, 2 是模 p 的二次非剩余. 用勒让德符号表示为 $\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{若 } p \equiv 1 \text{ 或 } 7 \pmod{8}, \\ -1 & \text{若 } p \equiv 3 \text{ 或 } 5 \pmod{8}. \end{cases}$

第 25 章 二次互反律

定理 25.1 (二次互反律)

设 p, q 是不同的奇素数, 则 $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$

定理 25.2 (广义二次互反律)

设 a, b 为正奇数, 则 $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$

