

# 数论概论学习小结 by lgwza

## 第5章 整除性与最大公因数

### 定理 5.1 (欧几里得算法)

要计算两个整数  $a$  与  $b$  的最大公因数, 先令  $r_{-1}=a$  且  $r_0=b$  然后计算相继的商和余数  $r_{i-1}=q_{i+1} \times r_i + r_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) 直到某余数  $r_{n+1}$  为  $0$ . 最后的非零余数  $r_n$  就是  $a$  与  $b$  的最大公因数.

## 第6章 线性方程与最大公因数

### 定理 6.1 (线性方程定理)

设  $a$  与  $b$  是非零整数  $g=\gcd(a,b)$ . 方程  $ax+by=g$  总是有一个整数解  $(x_1, y_1)$  它可由前面叙述的欧几里得算法得到. 则方程的每一个解可由  $(x_1 + k \cdot \frac{b}{g}, y_1 - k \cdot \frac{a}{g})$  得到, 其中  $k$  可为任意整数.

## 第7章 因数分解与算术基本定理

### 断言 7.1

令  $p$  是素数, 假设  $p$  整除乘积  $ab$ , 则  $p$  整除  $a$  或  $p$  整除  $b$  (或者  $p$  既整除  $a$  也整除  $b$ )

### 定理 7.2 (素数整除性质)

假设素数  $p$  整除乘积  $a_1 a_2 \dots a_r$ , 则  $p$  整除  $a_1, a_2, \dots, a_r$  中至少一个因数

### 定理 7.3 (算术基本定理)

每个整数  $n \geq 2$  可唯一分解成素数乘积  $n = p_1 p_2 \dots p_r$

## 第8章 同余式

如果  $m$  整除  $a-b$ , 我们就说  $a$  与  $b$  模  $m$  同余并记之为  $a \equiv b \pmod{m}$  数  $m$  叫做同余式的模. 具有相同模的同余式在许多方面表现得很像通常的等式. 如果  $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$  则  $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 \pmod{m}, a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$  提醒: 用数除同余式并非总是可能的. 换句话说, 如果  $ac \equiv bc$

$\pmod{m}$ ，则  $a \equiv b \pmod{m}$  未必成立。然而，如果  $\gcd(c, m) = 1$ ，则可从同余式  $ac \equiv bc \pmod{m}$  两边消去  $c$ 。

### 定理 8.1 (线性同余式定理)

设  $a, c$  与  $m$  是整数， $m \geq 1$ ，且设  $g = \gcd(a, m)$ 。(a)如果  $g \nmid c$ ，则同余式  $ax \equiv c \pmod{m}$  没有解 (b)如果  $g \mid c$ ，则同余式  $ax \equiv c \pmod{m}$  恰好有  $g$  个不同的解。要求这些解，首先求线性方程  $au + mv = g$  的一个解  $(u_0, v_0)$  (第6章叙述了解这个方程的方法)。则  $x_0 = cu_0/g$  是  $ax \equiv c \pmod{m}$  的解，不同余解的完全集由  $x \equiv x_0 + k \cdot \frac{m}{g} \pmod{m}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, g-1$  给出。

## 第9章 同余式、幂与费马小定理

### 定理 9.1 (费马小定理)

设  $p$  是素数， $a$  是任意整数且  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ，则  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

#### 断言 9.2

设  $p$  是素数， $a$  是任何整数且  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ，则数  $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a \pmod{p}$  与数  $1, 2, 3, \dots, (p-1) \pmod{p}$  相同，尽管它们的次序不同。

## 第 10 章 同余式、幂与欧拉公式

在  $0$  与  $m$  之间且与  $m$  互素的整数个数是个重要的量，我们赋予这个量一个名称： $\phi(m) = \#\{a: 1 \leq a \leq m, \gcd(a, m) = 1\}$ 。函数  $\phi$  叫做欧拉函数。

### 定理 10.1 (欧拉公式)

如果  $\gcd(a, m) = 1$ ，则  $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ 。

#### 断言 10.2

如果  $\gcd(a, m) = 1$ ，则数列  $b_1a, b_2a, b_3a, \dots, b_{\phi(m)}a \pmod{m}$  与数列  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{\phi(m)} \pmod{m}$  相同，尽管它们可能次序不同。

## 第 11 章 欧拉 $\phi$ 函数与中国剩余定理

**定理 11.1 (  $\phi$  函数公式)**

1. 如果  $p$  是素数且  $k \geq 1$ , 则  $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ .
2. 如果  $\gcd(m, n) = 1$ , 则  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ .

**定理 11.2 (中国剩余定理)**

设  $m$  与  $n$  是整数,  $\gcd(m, n) = 1$ ,  $b$  与  $c$  是任意整数. 则同余式组  $x \equiv b \pmod{m}$  与  $x \equiv c \pmod{n}$  恰有一个解  $0 \leq x \leq mn$ .

**第 12 章 素数****定理 12.1 (无穷多素数定理)**

存在无穷多个素数.

**定理 12.2 (模 4 余 3 的素数定理)**

存在无穷多个模 4 余 3 的素数.

**定理 12.3 (算术级数的素数狄利克雷定理)**

设  $a$  与  $m$  是整数,  $\gcd(a, m) = 1$ . 则存在无穷多个素数模  $m$  余  $a$ , 则存在无穷多个素数  $p$  满足  $p \equiv a \pmod{m}$ .

**第 13 章 素数计数**

$$\pi(x) = \#\{\text{素数 } p \mid p \leq x\}.$$

**定理 13.1 (素数定理)**

当  $x$  很大时, 小于  $x$  的素数个数近似等于  $x/\ln(x)$ . 换句话说,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$ .

**第 14 章 梅森素数****命题 14.1**

如果对整数  $a \geq 2$  与  $n \geq 2$ ,  $a^n - 1$  是素数, 则  $a$  必等于 2 且  $n$  一定是素数.

形如  $2^{p-1}$  的素数叫做梅森素数

## 第 15 章 梅森素数与完全数

完全数是等于其真因数之和的数

定理 15.1 (欧几里得完全数公式)

如果  $2^{p-1}$  是素数, 则  $2^{p-1}(2^p-1)$  是完全数

定理 15.2 (欧拉完全数定理)

如果  $n$  是完全数, 则  $n$  是  $n=2^{p-1}(2^p-1)$  形式, 其中  $2^{p-1}$  是梅森素数

$\sigma(n)=n$  的所有因数之和(包括 1 与  $n$ ).

定理 15.3 ( $\sigma$  函数公式)

1. 如果  $p$  是素数,  $k \geq 1$ , 则  $\sigma(p^k)=1+p+p^2+\dots+p^k=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}$
2. 如果  $\gcd(m, n)=1$ , 则  $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$ .

## 第 16 章 幂模 $m$ 与逐次平方法

算法 16.1 (逐次平方计算  $a^k \pmod{m}$ )

用下述步骤计算  $a^k \pmod{m}$  的值:

1. 将  $k$  表成  $2$  的幂次和:

$$k=u_0+u_1 \cdot 2+u_2 \cdot 2^2+u_3 \cdot 2^3+\dots+u_r \cdot 2^r$$

其中每个  $u_i$  是  $0$  或  $1$ . (这种表示式叫做  $k$  的二进制展开.)

2. 使用逐次平方法制作模  $m$  的  $a$  的幂次表.

$$a^1 \equiv A_0 \pmod{m} \quad a^2 \equiv (a^1)^2 \equiv A_0^2 \equiv A_1 \pmod{m} \quad a^4 \equiv (a^2)^2 \equiv A_1^2 \equiv A_2 \pmod{m} \quad a^8 \equiv (a^4)^2 \equiv A_2^2 \equiv A_3 \pmod{m} \quad \vdots \quad a^{2^r} \equiv (a^{2^{r-1}})^2 \equiv A_{r-1}^2 \equiv A_r \pmod{m}$$

注意要计算表的每一行, 仅需要取前一行最末的数, 平方它然后用模  $m$  简化. 也注意到表有  $r+1$  行, 其中  $r$  是第  $1$  步中  $k$  的二进制展开式中  $2$  的最高指数.

### 3. 乘积

$$A_0^{u_0} \cdot A_1^{u_1} \cdot A_2^{u_2} \cdots A_r^{u_r} \pmod{m}$$

同余于  $a^k \pmod{m}$ . 注意到所有  $u_i$  是 0 或 1, 因此这个数实际上是  $u_i$  等于 1 的那些  $A_i$

的乘积.

## 第 17 章 计算模 $m$ 的 $k$ 次根

### 算法 17.1 (计算模 $m$ 的 $k$ 次根原理)

设  $b, k$ , 与  $m$ , 是已知整数, 满足  $\gcd(b, m) = 1$  与  $\gcd(k, \phi(m)) = 1$ . 下述步骤给出同余式  $x^k \equiv b \pmod{m}$  的解.

1. 计算  $\phi(m)$ . (见第 11 章.)
2. 求满足  $ku - \phi(m)v = 1$  的正整数  $u$  与  $v$ . (见第 6 章, 另一种叙述方法是  $u$  是为满足  $ku \equiv 1 \pmod{\phi(m)}$  的正整数, 所以  $u$  实际上是  $k \pmod{\phi(m)}$  的逆)
3. 用逐次平方法计算  $b^u \pmod{m}$ . (见第 16 章.) 所得值给出解  $x$ .

## 第 19 章 素性测试与卡米歇尔数

卡米歇尔数是这样的合数  $n$ , 即对每个整数  $1 \leq a \leq n$ , 都有  $a^n \equiv a \pmod{n}$  换句话说, 卡米歇尔数是可冒充素数的一种合数, 因为它没有合数特征的证据.

1. 每个卡米歇尔数是奇数.
2. 每个卡米歇尔数是不同素数的乘积.

### 定理 19.1 (卡米歇尔数的考塞特判别法)

设  $n$  是合数. 则  $n$  是卡米歇尔数当且仅当它是奇数, 且整除  $n$  的每个素数  $p$  满足下述两个条件:

1.  $p^2$  不整除  $n$ .
2.  $p-1$  整除  $n-1$ .

### 定理 19.2 (素数的一个性质)

设  $p$  是奇素数, 记  $p-1 = 2^k q$ ,  $q$  是奇数. 设  $a$  是不被  $p$  整除的任何数, 则下述两个条件之一成立:

1.  $a^q \pmod{p}$  余 1
2. 数  $a^q, a^{2q}, a^{4q}, \dots, a^{2^{k-1}q}$  之一模  $p$  余 -1

### 定理 19.3 (合数的拉宾-米勒测试)

设  $n$  是奇素数, 记  $n-1=2^kq$ ,  $q$  是奇数. 对不被  $n$  整除的某个  $a$ , 如果下述两个条件都成立, 则  $n$  是合数.

1.  $a^q \equiv 1 \pmod{n}$ ,
2. 对所有  $i=0,1,2,\dots,k-1, a^{2^i q} \equiv -1 \pmod{n}$

如果  $n$  是奇合数, 则  $1$  与  $n-1$  之间至少有  $75\%$  的数可作为  $n$  的拉宾-米勒证据.

换句话说, 每个合数有许多拉宾-米勒证据来说明它的合数性, 所以, 不存在拉宾-米勒测试的任何“卡米歇尔型数”.

## 第 20 章 欧拉 $\phi$ 函数与因数和

对任意整数  $n$ , 定义函数  $F(n)$ :  $F(n)=\phi(d_1)+\phi(d_2)+\dots+\phi(d_r)$ , 其中  $d_1, d_2, \dots, d_r$  是  $n$  的因数.

### 断言 20.1

如果  $\gcd(m,n)=1$ , 则  $F(mn)=F(m)F(n)$

### 定理 20.2 (欧拉 $\phi$ 函数求和公式)

设  $d_1, d_2, \dots, d_r$  是  $n$  的因数, 则  $\phi(d_1)+\phi(d_2)+\dots+\phi(d_r)=n. (\sum_{d|n} \phi(d)=n)$

## 第 21 章 幂模 $p$ 与原根

如果  $a$  与  $p$  互素, 费马小定理(第 9 章)告诉我们  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$   $a$  模  $p$  的次数(或阶)指  $e_p(a)=(\text{使得 } a^e \equiv 1 \pmod{p} \text{ 的最小指数 } e \geq 1)$  (注意仅允许  $a$  与  $p$  互素.)

### 定理 21.1 (次数整除性质)

设  $a$  是不被素数  $p$  整除的整数, 假设  $a^n \equiv 1 \pmod{p}$ , 则次数  $e_p(a)$  整除  $n$ . 特别地, 次数  $e_p(a)$  总整除  $p-1$ .

具有最高次数  $e_p(g)=p-1$  的数称为模  $p$  的原根.

### 定理 21.2 (原根定理)

每个素数  $p$  都有原根. 更精确地, 有恰好  $\phi(p-1)$  个模  $p$  的原根..

## 第 22 章 原根与指标

模素数  $p$  的原根  $g$  的优美体现在每个模  $p$  的非零数以  $g$  的幂次出现. 所以, 对任何  $1 \leq a < p$ , 我们可选择幂  $g, g^2, g^3, g^4, \dots, g^{p-3}, g^{p-2}, g^{p-1}$  中恰好一个与  $a$  模  $p$  同余. 相应的指数被称为以  $g$  为底的  $a$  模  $p$  的指标. 假设  $p$  与  $g$  已给出, 则记指标为  $I(a)$ .

### 定理 22.1 (指标法则)

指标满足下述法则:

1.  $I(ab) \equiv I(a) + I(b) \pmod{p-1}$  [乘积法则]
2.  $I(a^k) \equiv kI(a) \pmod{p-1}$  [幂法则]

因为恰好与对数满足的法则  $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$  与  $\log(a^k) = k\log(a)$  相同. 由此, 指标也被称为 **离散对数**

## 第 23 章 模 $p$ 平方剩余

与一个平方数模  $p$  同余的非零数称为模  $p$  的二次剩余. 不与任何一个平方数模  $p$  同余的数称为模  $p$  的(二次)非剩余. 我们将二次剩余简记为  $QR$ , 而二次非剩余简记为  $NR$ . 与  $0$  模  $p$  同余的数既不是二次剩余, 也不是二次非剩余.

### 定理 23.1

设  $p$  为一个奇素数, 则恰有  $\frac{p-1}{2}$  个模  $p$  的二次剩余, 且恰有  $\frac{p-1}{2}$  个模  $p$  的二次非剩余.

### 定理 23.2 (二次剩余乘法法则——版本 1)

设  $p$  为奇素数, 则

1. 两个模  $p$  的二次剩余的积是二次剩余.
2. 二次剩余与二次非剩余的积是二次非剩余.
3. 两个二次非剩余的积是二次剩余.

这三条法则可用符号表示如下:  $QR \times QR = QR, QR \times NR = NR, NR \times NR = QR$ .

$a$  模  $p$  的勒让德符号是  $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{若 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余,} \\ -1 & \text{若 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余.} \end{cases}$

### 定理 23.3 (二次剩余的乘法法则——版本 2)

设  $p$  为奇素数, 则  $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)=\left(\frac{ab}{p}\right)$

## 第 24 章 $-1$ 是模 $p$ 平方剩余吗? 2 呢

### 定理 24.1 (欧拉准则)

设  $p$  为奇素数, 则  $a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$ .

### 定理 24.2 (二次互反律——第 I 部分)

设  $p$  为奇素数, 则  $-1$  是模  $p$  的二次剩余, 若  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $-1$  是模  $p$  的二次非剩余, 若  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . 换句话说, 用勒让德符号可以表示为  $\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{若 } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{若 } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$ .

### 定理 24.3 (模 4 余 1 素数定理)

存在无穷多个素数与  $1$  模  $4$  同余

### 定理 24.4 (二次互反律——第 II 部分)

设  $p$  为奇素数, 则当  $p$  模  $8$  余  $1$  或  $7$  时,  $2$  是模  $p$  的二次剩余; 当  $p$  模  $8$  余  $3$  或  $5$  时,  $2$  是模  $p$  的二次非剩余. 用勒让德符号表示为  $\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{若 } p \equiv 1 \text{ 或 } 7 \pmod{8} \\ -1 & \text{若 } p \equiv 3 \text{ 或 } 5 \pmod{8} \end{cases}$ .

## 第 25 章 二次互反律

### 定理 25.1 (二次互反律)

设  $p, q$  是不同的奇素数, 则  $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ .

### 定理 25.2 (广义二次互反律)

设  $a, b$  为正奇数, 则  $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$ .

