

树链剖分

树链剖分的思想及能解决的问题

树链剖分用于将树分割成若干条链的形式，以维护树上路径的信息。

具体来说，将整棵树剖分为若干条链，使它组合成线性结构，然后用其他的数据结构维护信息。

树链剖分（树剖/链剖）有多种形式，如重链剖分、长链剖分和用于 Link/cut Tree 的剖分（有时被称作“实链剖分”），大多数情况下（没有特别说明时），“树链剖分”都指“重链剖分”。

重链剖分可以将树上的任意一条路径划分成不超过 $O(\log n)$ 条连续的链，每条链上的点深度互不相同（即是自底向上的一条链，链上所有点的 LCA 为链的一个端点）。

重链剖分还能保证划分出的每条链上的结点 DFS 序连续，因此可以方便地用一些维护序列的数据结构（如线段树）来维护树上路径的信息。

如：

1. 修改树上两点之间的路径上所有点的值。
2. 查询树上两点之间的路径上结点权值的和/极值/其它（在序列上可以用数据结构维护，便于合并的信息）

除了配合数据结构来维护树上路径信息，树剖还可以用来 $O(\log n)$ （且常数较小）地求 LCA。在某些题目中，还可以利用其性质来灵活地运用树剖。

重链剖分

我们给出一些定义：

定义重子结点表示其子结点中子树最大的子结点。如果有多个子树最大的子结点，取其一。如果没有子结点，就无重子结点。

定义轻子结点表示剩余的所有子结点。

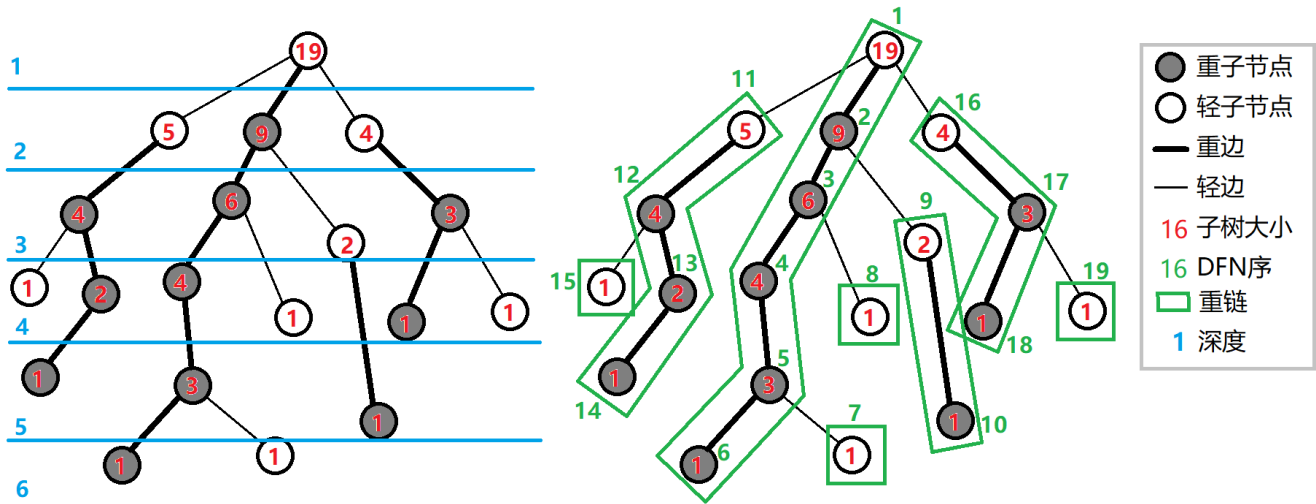
从这个结点到重子结点的边为重边

到其他轻子结点的边为轻边

若干条首尾衔接的重边构成重链

把落单的结点也当作重链，那么整棵树就被剖分成若干条重链。

如图：



实现

树剖的实现分两个 DFS 的过程。伪代码如下：

第一个 DFS 记录每个结点的父节点 `father`、深度 `deep`、子树大小 `size`、重子结点 `hson`。\$
`\begin{array}{l}\text{TREE-BUILD}(u,dep)\ \begin{array}{l} 1 \ \& \ u.hson\ \text{gets } 0\ 2\ \& \ u.hson.size\ \text{gets } 0\ 3\ \& \ u.deep\ \text{gets } dep\ 4\ \& \ u.size\ \text{gets } 1\ 5\ \& \ \text{for } \ \text{each } \ u\ \text{'s son } \ v\ 6\ \& \ \text{quad } \ u.size\ \text{gets } u.size+\ \text{TREE-BUILD}(v,dep+1)\ 7\ \& \ \text{quad } \ v.father\ \text{gets } u\ 8\ \& \ \text{quad } \ \text{if } \ v.size>u.hson.size\ 9\ \& \ \text{quad}\ \text{quad } \ u.hson\ \text{gets } v\ 10\ \& \ \text{return} \ \end{array} \ u.size\ \end{array}` \$
 第二个 DFS 记录所在链的链顶 `top` (应初始化为结点本身)、重边优先遍历时的 DFS 序 (`dfn`、DFS 序对应的结点编号 `rank`)。\$
`\begin{array}{l}\text{TREE-DECOMPOSITION}(u,top)\ \begin{array}{l} 1 \ \& \ u.top\ \text{gets } top\ 2 \ \& \ tot\ \text{gets } tot+1\ 3 \ \& \ u.dfn\ \text{gets } tot\ 4 \ \& \ rank(tot)\ \text{gets } u\ 5 \ \& \ \text{if } \ u.hson\ \text{is not } \ 0\ 6 \ \& \ \text{quad} \ \text{TREE-DECOMPOSITION}(u.hson,top)\ 7 \ \& \ \text{quad} \ \text{for } \ \text{each } \ u\ \text{'s son } \ v\ 8\ \& \ \text{quad}\ \text{quad} \ \text{if } \ v\ \text{is not } \ u.hson\ 9 \ \& \ \text{quad}\ \text{quad} \ \text{TREE-DECOMPOSITION}(v,v)\ \end{array} \ \end{array}` \$ 以下为代码实现。

我们先给出一些定义：

- $fa(x)$ 表示结点 x 在树上的父亲。
- $dep(x)$ 表示结点 x 在树上的深度。
- $siz(x)$ 表示结点 x 的子树的结点个数。
- $son(x)$ 表示结点 x 的重儿子。
- $top(x)$ 表示结点 x 所在重链的顶部结点 (深度最小)。
- $dfn(x)$ 表示结点 x 的 DFS 序，也是其在线段树中的编号。
- $rnk(x)$ 表示 DFS 序所对应的结点编号，有 $rnk(dfn(x))=x$ 。

我们进行两遍 DFS 预处理出这些值，其中第一次 DFS 求出 $fa(x), dep(x), siz(x), son(x)$ ，第二次 DFS 求出 $top(x), dfn(x), rnk(x)$ 。

```
void dfs1(int o){
    son[o]=-1;
    siz[o]=1;
    for(int j=h[o];j;j=nxt[j]){
```

```

        if(!dep[p[j]]){
            dep[p[j]]=dep[o]+1;
            fa[p[j]]=o;
            dfs1(p[j]);
            siz[o]+=siz[p[j]];
            if(son[o]==-1||siz[p[j]]>siz[son[o]]) son[o]=p[j];
        }
    }
}
void dfs2(int o,int t){
    top[o]=t;
    cnt++;
    dfn[o]=cnt;
    rnk[cnt]=o;
    if(son[o]==-1) return;
    dfs2(son[o],t); // 优先对重儿子进行 DFS 可以保证同一条重链上的点 DFS 序连续
    for(int j=h[o];j;j=nxt[j]){
        if(p[j]!=son[o]&&p[j]!=fa[o]) dfs2(p[j],p[j]);
    }
}
}

```

重链剖分的性质

树上每个结点都属于且仅属于一条重链

重链开头的结点不一定是重子结点（因为重边是对于每一个结点都有定义的）。

所有的重链将整棵树完全剖分

在剖分时优先遍历重儿子，最后重链的 DFS 序就会是连续的。

在剖分时重边优先遍历，最后树的 DFN 序上，重链内的 DFN 序是连续的。按 DFN 排序后的序列即为剖分后的链。

一棵子树内的 DFN 序是连续的。

可以发现，当我们向下经过一条轻边时，所在子树的大小至少会除以二。

因此，对于树上的任意一条路径，把它拆分成从 LCA 分别向两边往下走，分别最多走 $O(\log n)$ 次，因此，树上的每条路径都可以被拆分成不超过 $O(\log n)$ 条重链。

常见应用

路径上维护

用树链剖分求树上两点路径权值和，伪代码如下

```

    \begin{array}{l}
    \text{TREE-PATH-SUM}(u,v) \\
    \begin{array}{l}
    1 \ \text{tot} \leftarrow 0 \\
    2 \ \text{while } u.\text{top} \neq v.\text{top} \\
    3 \ \quad \text{if } u.\text{top}.\text{deep} < v.\text{top}.\text{deep} \\
    4 \ \quad \quad \text{SWAP}(u,v) \\
    5 \ \quad \quad \text{tot} \leftarrow \text{tot} + \text{sum of values between } u \text{ and } u.\text{top} \\
    6 \ \quad \quad u \leftarrow u.\text{father} \\
    7 \ \quad \quad \text{tot} \leftarrow \text{tot} + \text{sum of}
    \end{array}
    \end{array}

```

values between u and v 链上的 DFS 序是连续的，可以使用线段树、树状数组维护。

每次选择深度较大的链往上跳，直到两点在同一条链上。

同样的跳链结构适用于维护、统计路径上的其他信息。

子树维护

有时会要求维护子树上的信息，譬如将以 x 为根的子树的所有结点的权值增加 v

在 DFS 搜索的时候，子树中的结点的 DFS 序是连续的。

每一个结点记录 bottom 表示所在子树连续区间末端的结点。

这样就把子树信息转化为连续的一段区间信息。

求最近公共祖先

不断向上跳重链，当跳到同一条重链上时，深度较小的结点即为 LCA

向上跳重链时需要先跳所在重链顶端深度较大的那个。

参考代码：

```
int lca(int u,int v){
    while(top[u]!=top[v]){
        if(dep[top[u]]>dep[top[v]])
            u=fa[top[u]];
        else
            v=fa[top[v]];
    }
    return dep[u]>dep[v]?v:u;
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E6%A0%91%E9%93%BE%E5%89%96%E5%88%86_lgwza&rev=1594106236

Last update: 2020/07/07 15:17